CAPÍTULO 9

Deflexión de vigas

La fotografía muestra un puente con varias trabes durante su construcción. El diseño de las trabes de acero se basa tanto en consideraciones sobre su resistencia como en evaluaciones de su deflexión.

9.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se estudió el diseño de vigas para lograr su resistencia. En éste y en el siguiente se analizará otro aspecto del diseño de vigas: la determinación de la *deflexión*. El cálculo de la *deflexión máxima* de una viga bajo una carga dada es de interés particular, ya que las especificaciones de diseño incluyen generalmente un valor máximo admisible para la deflexión. También resulta de interés conocer las deflexiones para analizar las *vigas indeterminadas*. Éstas son vigas en las que el número de reacciones en los apoyos excede el número de las ecuaciones de equilibrio de que se dispone para determinar las incógnitas.

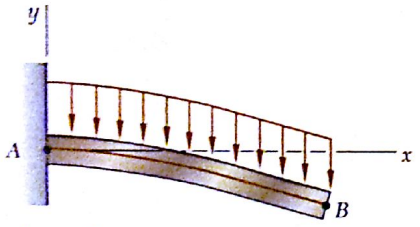
En la sección 4.4 se dijo que una viga prismática sometida a flexión pura se flexiona en forma de arco y que, dentro del rango elástico, la curvatura de la superficie neutra puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

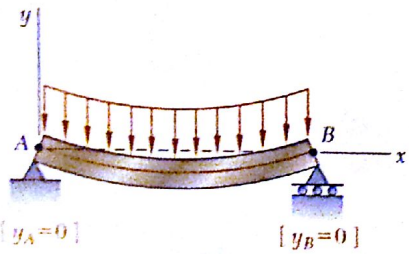
siendo M el momento flector, E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Cuando una viga se somete a carga transversal, la ecuación (4.21) permanece válida para cualquier sección transversal, siempre que el principio de Saint-Venant sea aplicable. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$



a) Viga volada



b) Viga simplemente soportada

Figura 9.1

El conocimiento de la curvatura en varios puntos de la viga permitirá deducir algunas conclusiones generales con respecto a la deformación de la viga bajo carga (véase sección 9.2).

Para determinar la pendiente y la deflexión de la viga en cualquier punto, se deduce primero la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden que caracteriza a la *curva elástica* o forma de la viga deformada (véase sección 9.3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Si el momento flector se representa para todos los valores de x, por una sola expresión $M(x)$ como en el caso de vigas y cargas de la figura 9.1, la pendiente $\theta = dy/dx$ y la deflexión y en cualquier punto de la viga pueden obtenerse por dos integraciones sucesivas. Las dos constantes de integración introducidas en el punto se determinarán de las condiciones de frontera indicadas en la figura.

Sin embargo, si se requieren diferentes funciones para representar el momento flector en varias porciones de la viga, se requerirán también diferentes ecuaciones diferenciales, que conducirán a distintas funciones para la curva elástica en las diversas porciones de la viga. En el caso de la viga de la figura 9.2, por ejemplo, se requieren dos ecuaciones diferenciales, una para la porción AD y otra para la DB. La primera produce las funciones θ_1 y y_1, y la segunda θ_2 y y_2. En suma deben determinarse cuatro constantes de integración: dos se obtendrán considerando que la deflexión es cero en A y en B; las otras dos, expresando que las porciones de viga AD y DB tienen igual pendiente y deflexión en D.

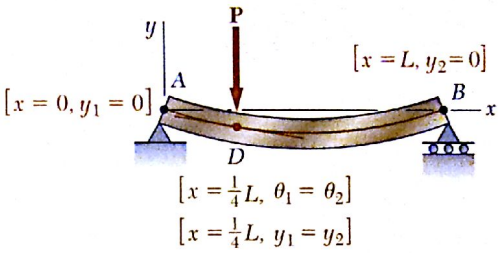


Figura 9.2

En la sección 9.4 se observará que en el caso de una viga con carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede obtenerse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas. Las constantes introducidas en este proceso se determinarán de los valores de V, M, θ y y.

En la sección 9.5 se estudiarán las *vigas estáticamente indeterminadas*, es decir, apoyadas de tal manera que las reacciones en los apoyos introducen cuatro o más incógnitas. Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio, éstas deben complementarse con ecuaciones deducidas de las condiciones límite impuestas por los apoyos.

El método antes descrito, para la determinación de la curvatura elástica cuando se requieren varias funciones para representar el momento flector M, puede ser muy laborioso, ya que requiere ajustar pendientes y ordenadas en cada punto de transición. En la sección 9.6 se estudiará que el uso de *funciones de singularidad* (analizadas en la sección 5.5) simplifica mucho el cálculo de θ y de y en un punto de la viga.

La siguiente parte del capítulo (secciones 9.7 y 9.8) se dedica al *método de superposición*, que consiste en determinar por separado la pendiente y deflexión causadas por diferentes cargas aplicadas a la viga, y luego sumarlas. Este método es más fácil usando la tabla del apéndice D, que muestra las pendientes y las deflexiones de las vigas para diversas cargas y tipos de apoyo.

En la sección 9.9 se usarán ciertas propiedades geométricas de la curva elástica para determinar la deflexión y pendiente de una viga en un punto dado. En lugar de expresar el momento flector como una función $M(x)$ e integrarla analíticamente, se dibujará el diagrama que representa la variación de M/EI a lo largo de la longitud de la viga y se deducirán dos teoremas del momento de área. El *primer teorema del momento de área* permitirá calcular el ángulo entre las tangentes de la viga en dos puntos; el *segundo teorema del momento de área* se usará para calcular la distancia vertical de un punto sobre la viga a la tangente en un segundo punto.

Los teoremas del momento de área se emplearán en la sección 9.10 para determinar la pendiente y deflexión en puntos seleccionados de vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas. En la sección 9.11 se encontrará que en muchos casos las áreas y momentos definidos por el diagrama M/EI pueden determinarse con más facilidad si se dibuja el *diagrama de momento flector por partes*. Como se estudió en el método de momento de área, se observará que este método es efectivo en el caso particular de *vigas de sección transversal variable*.

Las vigas con cargas asimétricas y vigas colgantes se estudiarán en la sección 9.12. Toda vez que para una carga asimétrica la deflexión máxima no ocurre en el centro de la viga, en la sección 9.13 se analizará con el fin de determinar la *deflexión máxima* cómo localizar el punto en el que la tangente es horizontal. La sección 9.14 se dedicará a la solución de problemas que involucran *vigas estáticamente indeterminadas*.

9.2 DEFORMACIÓN DE UNA VIGA BAJO CARGA TRANSVERSAL

Al comenzar este capítulo se recordó la ecuación (4.21) de la sección 4.4, que relaciona la curvatura de la superficie neutra con el momento flector en una viga sometida a flexión pura. Se anotó que esta ecuación es válida para cualquier sección transversal de una viga bajo carga transversal si rige el principio de Saint-Venant. Sin embargo, el momento flector y la curvatura variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

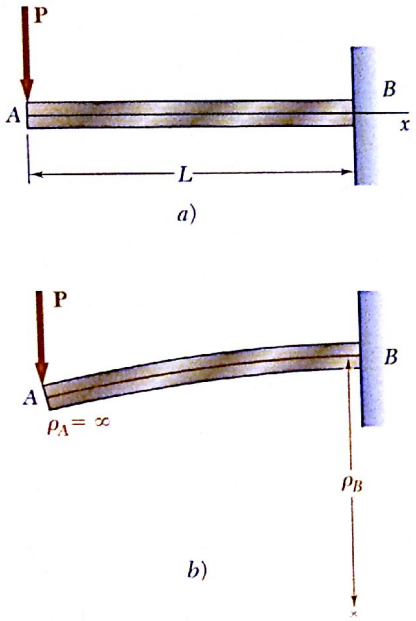


Figura 9.3

Considere, por ejemplo, una viga en voladizo AB de longitud L sometida a una carga concentrada de **P** en su extremo libre A (figura 9.3*a*). Si se tiene que $M(x) = -Px$, y sustituyendo en (9.1),

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

la cual muestra que la curvatura de la superficie neutra varía linealmente con x, desde cero en A, donde ρ_A es infinito, hasta $-PL/EI$ en B, donde $|\rho_B| = EI/PL$ (figura 9.3*b*).

Considere ahora la viga AD de la figura 9.4*a*, que sostiene dos cargas concentradas, como se muestra. Del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.4*b*) se tiene que las reacciones en los apoyos son $R_A = 1$ kN y $R_C = 5$ kN, respectivamente, y se dibuja el diagrama de momento flector correspondiente (figura 9.5*a*). Note que M y, por tanto, la curvatura se anulan en ambos extremos de la viga y también en un punto E situado en $x = 4$ m. Entre A y E el momento flector es positivo y la viga es cóncava hacia arriba; entre E y D el momento flector es negativo y la viga es cóncava hacia abajo

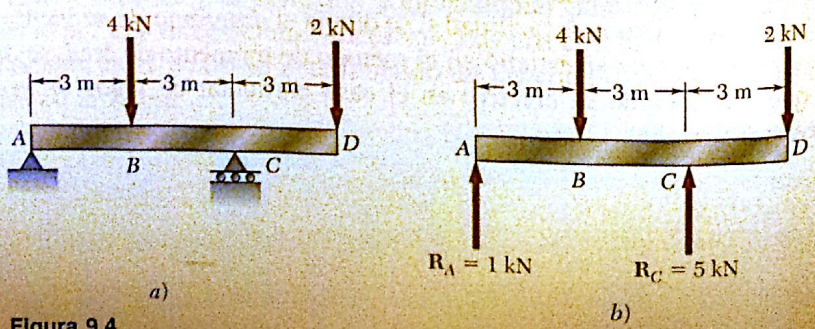


Figura 9.4

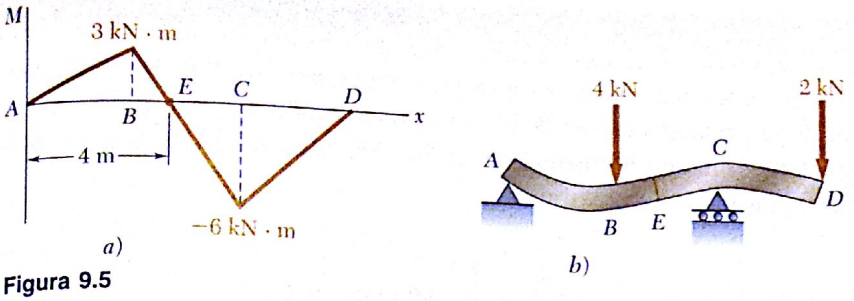


Figura 9.5

(figura 9.5*b*). Observe también que el máximo valor de la curvatura (es decir, el mínimo valor del radio de curvatura) ocurre en el apoyo *C*, donde $|M|$ es máximo.

De la información obtenida sobre su curvatura, se obtiene una buena idea sobre la forma de la viga deformada. No obstante, el análisis y diseño de la viga requieren información más precisa sobre la *deflexión* y la *pendiente* de la viga en varios puntos. De particular importancia es el conocimiento de la *deflexión máxima* de la viga. En la próxima sección se utilizará la ecuación (9.1) para obtener una relación entre la deflexión *y*, medida en un punto dado *Q* en el eje de la viga, y la distancia *x* de ese punto a algún origen fijo (figura 9.6). La relación obtenida es la ecuación de la *curva elástica*, es decir, la ecuación de la curva en la cual se convierte el eje de la viga, bajo la carga dada (figura 9.6*b*).†

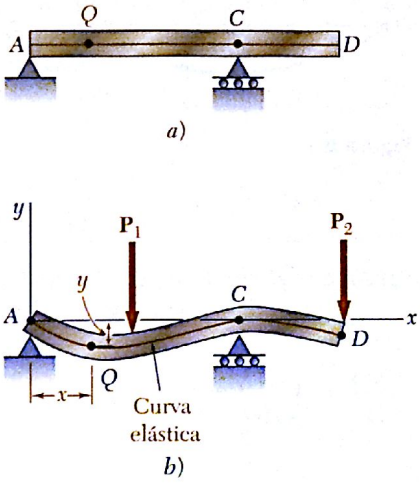


Figura 9.6

9.3 ECUACIÓN DE LA CURVA ELÁSTICA

Recuerde primero, del cálculo elemental, que la curvatura de una curva plana en un punto $Q(x,y)$ de la curva es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{9.2}$$

en donde dy/dx y d^2y/dx^2 son la primera y segunda derivadas de la función $y(x)$ representada por esa curva. Pero, en el caso de la curva elástica de una viga, la pendiente dy/dx es muy pequeña y su cuadrado es despreciable comparado con la unidad. Entonces:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9.3}$$

Sustituyendo por $1/\rho$ de (9.3) en (9.1), se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden; es la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica.

† Debe notarse que, en este capítulo y el siguiente, *y* representa el desplazamiento vertical. En capítulos anteriores representaba la distancia de un punto dado, en una sección transversal al eje neutro de la sección.

El producto EI se conoce como la *rigidez a flexión* y si varía a lo largo de la viga, como en el caso de una viga de sección variable, debe expresársele como función de x antes de integrar la ecuación (9.4). Sin embargo, para una viga prismática, que es el caso considerado aquí, la rigidez a flexión es constante. Pueden multiplicarse ambos miembros de la ecuación (9.4) por EI e integrar en x. Se escribe

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

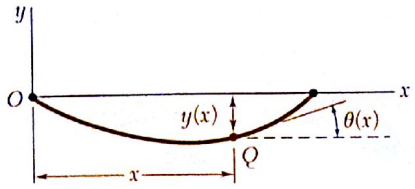


Figura 9.7

siendo C_1 una constante de integración. Si $\theta(x)$ es el ángulo en radianes que la tangente a la curva elástica forma con la horizontal en Q (figura 9.7), y recordando que este ángulo es pequeño, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \simeq \theta(x)$$

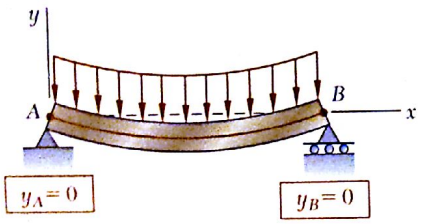
En consecuencia, la ecuación (9.5) puede escribirse en la forma alternativa

$$EI\,\theta(x) = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5'}$$

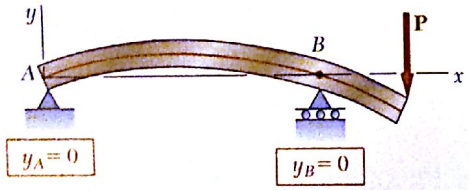
Integrando los dos miembros de la ecuación (9.5) en x, se tiene

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)\,dx + C_1\right]dx + C_2$$

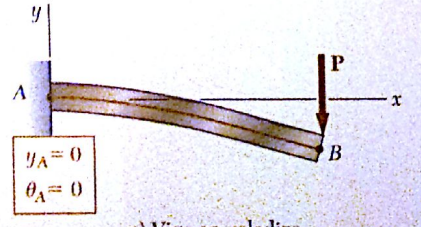
$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$



a) Viga simplemente soportada



b) Viga de un tramo en voladizo



c) Viga en voladizo

Figura 9.8 Condiciones de frontera para vigas estáticamente determinadas.

en donde C_2 es una segunda constante y el primer término del miembro derecho es la función de x obtenida integrando dos veces en x el momento flector $M(x)$. Si no fuera porque C_1 y C_2 permanecen indeterminadas, la ecuación (9.6) definiría la deflexión de la viga en cualquier punto dado Q y la ecuación (9.5) o la (9.5′) definirían del mismo modo la pendiente de la viga en Q.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las *condiciones de frontera* o, dicho con mayor precisión, de las condiciones impuestas en la viga por sus apoyos. Limitando al análisis en esta sección a *vigas estáticamente determinadas*, es decir, a vigas apoyadas de tal manera que las reacciones pueden obtenerse por estática, observe que aquí puedan considerarse tres tipos de vigas (figura 9.8): *a*) la *viga simplemente apoyada*, *b*) la *viga de un tramo en voladizo* y *c*) la *viga en voladizo*.

En los primeros dos casos, los apoyos son fijos en A y móviles en B y todos requieren que la deflexión sea cero. Haciendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y luego $x = x_B$, $y = y_B = 0$ en la misma, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2. En el caso del voladizo (figura 9.8*c*), se nota que tanto la pendiente como la deflexión en A deben ser cero. Haciendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y, $x = x_A$, $\theta = \theta_A = 0$ en la ecuación (9.5′) se obtienen de nuevo dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2.

EJEMPLO 9.01

La viga en voladizo AB es de sección transversal uniforme y soporta una carga **P** en su extremo libre A (figura 9.9). Halle la ecuación de la curva elástica y la deflexión y pendiente en A.

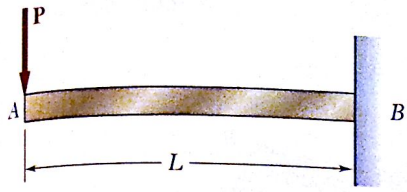


Figura 9.9

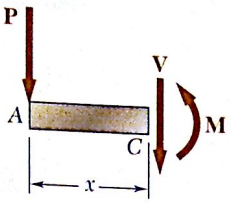


Figura 9.10

Usando el diagrama de cuerpo libre de la porción AC de la viga (figura 9.10) en donde C está a una distancia x del extremo A, se tiene

$$M = -Px \tag{9.7}$$

Sustituyendo M en la ecuación 9.4 y multiplicando por EI,

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Integrando en x,

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + C_1 \tag{9.8}$$

Se observa ahora que en el extremo fijo B se tiene $x = L$ y $\theta = dy/dx = 0$ (figura 9.11). Sustituyendo estos valores (9.8) y despejando C_1, se tiene,

$$C_1 = \tfrac{1}{2}PL^2$$

que se reemplaza en (9.8):

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + \tfrac{1}{2}PL^2 \tag{9.9}$$

Integrando ambos miembros de (9.9),

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x + C_2 \tag{9.10}$$

Pero en B se tiene $x = L$, $y = 0$. Sustituyendo en (9.10),

$$0 = -\tfrac{1}{6}PL^3 + \tfrac{1}{2}PL^3 + C_2$$
$$C_2 = -\tfrac{1}{3}PL^3$$

Llevando este valor de C_2 a la ecuación (9.10) se obtiene la ecuación de la curva elástica:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x - \tfrac{1}{3}PL^3$$

o

$$y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \tag{9.11}$$

La deflexión y la pendiente en A se obtiene haciendo $x = 0$ en las ecuaciones (9.11) y (9.9). Se halla que

$$y_A = -\frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{y} \qquad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

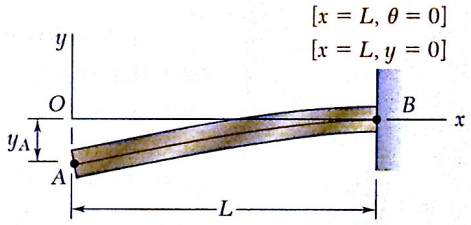


Figura 9.11

EJEMPLO 9.02

La viga prismática simplemente apoyada AB soporta una carga uniformemente distribuida w por unidad de longitud (figura 9.12). Halle la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima.

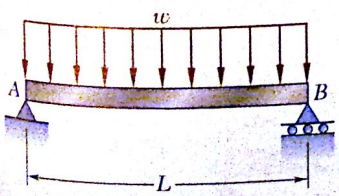


Figura 9.12

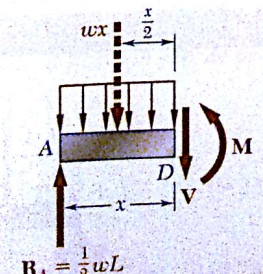


Figura 9.13

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción AD de la viga (figura 9.13) y tomando momentos con respecto a D, se encuentra que

$$M = \tfrac{1}{2}wLx - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{9.12}$$

Sustituyendo a M en la ecuación (9.4) y multiplicando ambos miembros por EI,

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \tag{9.13}$$

Integrando dos veces en x,

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_1 \tag{9.14}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_1x + C_2 \tag{9.15}$$

Observando que $y = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.14), primero se hace $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (9.15) y se obtiene $C_2 = 0$. Luego $x = L$ y $y = 0$ en la misma ecuación y se escribe

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_1L$$
$$C_1 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Llevando los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (9.15) se obtiene la ecuación de la curva elástica.

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{12}wLx^3 - \tfrac{1}{24}wL^3x$$

o

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (9.14) el valor de C_1, se verifica que la pendiente de la viga es cero para $x = L/2$ y que la curva elástica tiene un mínimo en el punto medio C de la viga (figura 9.15). Haciendo $x = L/2$ en la ecuación (9.16),

$$y_C = \frac{w}{24EI}\left(-\frac{L^4}{16} + 2L\frac{L^3}{8} - L^3\frac{L}{2}\right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

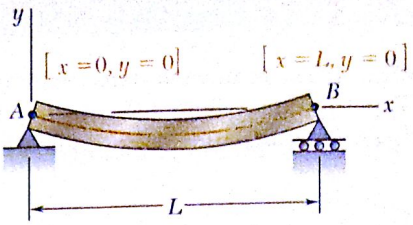


Figura 9.14

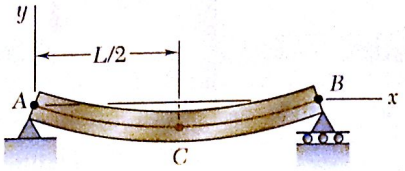


Figura 9.15

La deflexión máxima o, más exactamente, el máximo valor absoluto de la deflexión es:

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

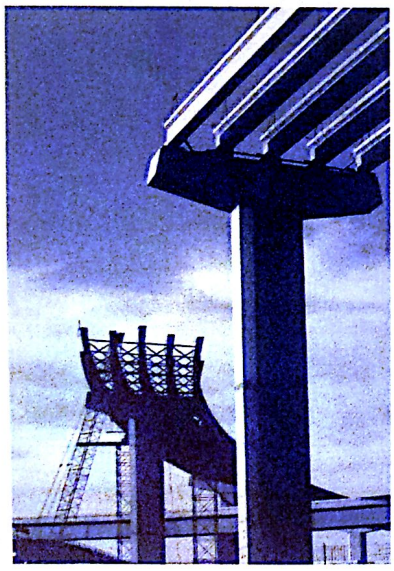


Figura 9.16 Se requiere una función $M(x)$ diferente en cada parte de los brazos volados.

En los dos ejemplos considerados, sólo fue necesario un diagrama de cuerpo libre para determinar el momento flector en la viga. En consecuencia, sólo se utilizó una función de x para representar a M a lo largo de la viga. Esto, generalmente, no es el caso. Las cargas concentradas, las reacciones en los apoyos o las discontinuidades en una carga distribuida dividirán la viga en varias porciones y representarán el momento por una función diferente $M(x)$ en cada una de dichas porciones (figura 9.16). Cada función $M(x)$ conducirá a una expresión diferente para la pendiente $\theta(x)$ y para la deflexión $y(x)$. Como cada expresión para la deflexión debe contener dos constantes de integración, deben determinarse numerosas constantes. Como se estudiará en el próximo ejemplo, las condiciones adicionales de frontera requeridas pueden obtenerse observando que aunque la fuerza cortante y el momento flector pueden ser discontinuos en varios puntos de una viga, la *deflexión* y la *pendiente* de la viga *no pueden ser discontinuas* en ningún punto.

EJEMPLO 9.03

Para la viga prismática y la carga mostradas (figura 9.17) determine la pendiente y la deflexión en el punto D.

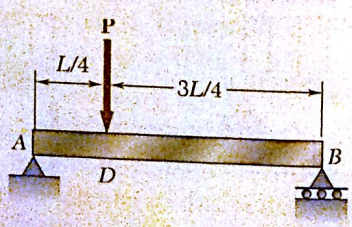


Figura 9.17

Debe dividirse la viga en dos porciones, AD y DB, y hallar la función $y(x)$ que define la curva elástica para cada una de ellas.

1. De A a D ($x < L/4$). Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga AE de longitud $x < L/4$ (figura 9.18). Tomando momentos con respecto a E, se tiene

$$M_1 = \frac{3P}{4}x \tag{9.17}$$

o, de la ecuación (9.4)

$$EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}Px \tag{9.18}$$

en donde $y_1(x)$ es la función que define la curva elástica *para la porción AD de la viga*. Integrando en x,

$$EI\,\theta_1 = EI\frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \tag{9.19}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2 \tag{9.20}$$

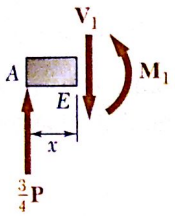


Figura 9.18

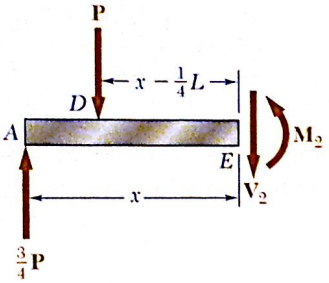


Figura 9.19

2. De D a B ($x > L/4$). Ahora dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga AE de longitud $x > L/4$ (figura 9.19) y escriba

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \tag{9.21}$$

o, de la ecuación (9.4), reordenando términos,

$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4}Px + \frac{1}{4}PL \tag{9.22}$$

en donde $y_2(x)$ define la curva elástica *para la porción DB de la viga*. Integrando en x,

$$EI\,\theta_2 = EI\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3 \tag{9.23}$$

$$EI\,y_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4 \tag{9.24}$$

Cálculo de las constantes de integración. Las condiciones que deben satisfacer las constantes de integración se resumen en la figura 9.20. En el apoyo A, en donde la deflexión se define mediante la ecuación (9.20), deben tenerse $x = 0$ y $y_1 = 0$. En el apoyo B, donde la deflexión la da la ecuación (9.24), debe tenerse $x = L$ y $y_2 = 0$. También, puesto que no debe haber cambio en la deflexión o en la pendiente en el punto D, se sigue que $y_1 = y_2$ y $\theta_1 = \theta_2$ en $x = L/4$. Se tiene entonces

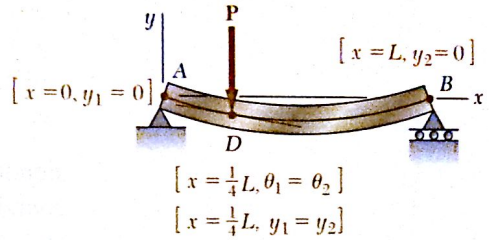


Figura 9.20

$$[x = 0, y_1 = 0],\ \text{ecuación (9.20)}: \quad 0 = C_2 \tag{9.25}$$

$$[x = L, y_2 = 0],\ \text{ecuación (9.24)}: \quad 0 = \frac{1}{12}PL^3 + C_3L + C_4 \tag{9.26}$$

$[x = L/4, \theta_1 = \theta_2]$, ecuaciones (9.19) y (9.23):

$$\frac{3}{128}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3 \tag{9.27}$$

$[x = L/4, y_1 = y_2]$, ecuaciones (9.20) y (9.24):

$$\frac{PL^3}{512} + C_1\frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1\,536} + C_3\frac{L}{4} + C_4 \tag{9.28}$$

Resolviendo estas ecuaciones,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128},\ C_2 = 0,\ C_3 = -\frac{11PL^2}{128},\ C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (9.19) y (9.20), se tiene para $x \le L/4$,

$$EI\,\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \tag{9.29}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{7PL^2}{128}x \tag{9.30}$$

Haciendo $x = L/4$ en cada una de estas ecuaciones, se halla que la pendiente y la deflexión en D son, respectivamente,

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI} \quad \text{y} \quad y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

Note que como $\theta_D \neq 0$, la deflexión en D *no* es la máxima de la viga.

*9.4 DETERMINACIÓN DIRECTA DE LA CURVA ELÁSTICA A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

En la sección 9.3 se estudió que la ecuación de la curva elástica puede obtenerse integrando dos veces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

siendo $M(x)$ el momento flector de la viga. Recuerde, de la sección 5.3, que cuando una viga soporta una carga $w(x)$, se tiene $dM/dx = V$ y $dV/dx = -w$ en cualquier punto de la viga. Derivando la ecuación (9.4) con respecto a x y suponiendo a EI constante,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \tag{9.31}$$

y derivando de nuevo,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI}$$

Se concluye que cuando una viga prismática soporta una carga distribuida $w(x)$, su curva elástica obedece a la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \tag{9.32}$$

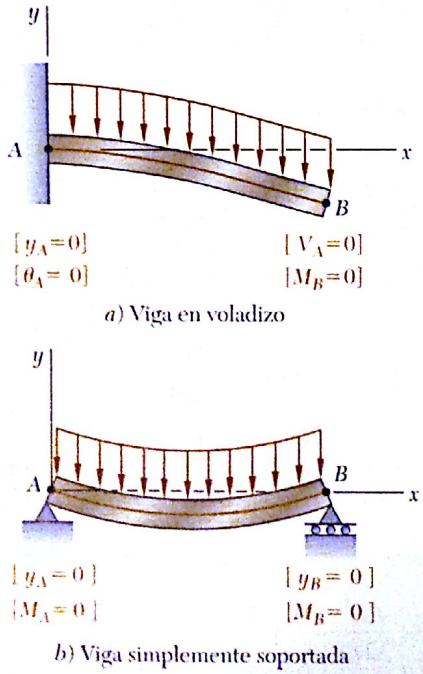


Figura 9.21 Condiciones de frontera para vigas que soportan cargas distribuidas.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (9.32) por la constante EI e integrando cuatro veces:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -\int w(x)\,dx + C_1$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\int dx \int w(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.33}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta(x) = -\int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EI\,y(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Las cuatro constantes de integración se determinan de las condiciones de frontera. Éstas incluyen: *a*) las condiciones impuestas en la deflexión o pendiente de la viga por sus apoyos (véase la sección 9.3) y *b*) la condición de que tanto V como M deben ser cero en el extremo libre de una viga en voladizo o que el momento flector debe ser cero en ambos extremos de una viga simplemente apoyada (véase sección 5.3). Esto se ilustra en la figura 9.21.

El método aquí presentado puede usarse eficientemente en voladizos o vigas simples con cargas distribuidas. En el caso de vigas con dos apoyos y voladizo, sin embargo, las reacciones en los apoyos causarán discontinuidades en la fuerza cortante, es decir, en la tercera derivada de y, y se requerirán diferentes funciones para definir la curva elástica en toda la viga.

EJEMPLO 9.04

La viga prismática simplemente apoyada AB soporta una carga uniformemente distribuida w por unidad de longitud (figura 9.22). Determine la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima. (Ésta es la misma viga del ejemplo 9.02.)

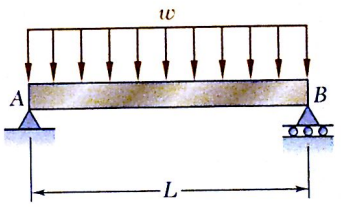


Figura 9.22

Como w = constante, las primeras tres de las ecuaciones (9.33) dan:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.34)$$

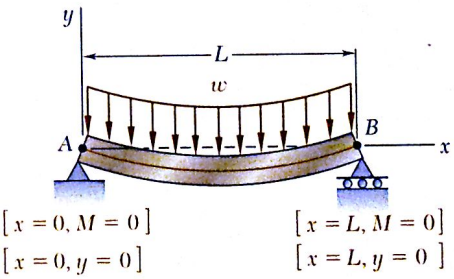


Figura 9.23

Puesto que las condiciones de frontera exigen que $M = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.23), se hace primero $x = 0$ y $M = 0$ en la ecuación (9.34) y se obtiene $C_2 = 0$. Después se hace $x = L$ y $M = 0$ en la misma ecuación, para obtener $C_1 = \frac{1}{2}wL$.

Llevando los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (9.34) e integrando dos veces:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \qquad (9.35)$$

Pero las condiciones de frontera también requieren que $y = 0$ en ambos extremos de la viga. Si $x = 0$, y $y = 0$ en la ecuación (9.35), se obtiene $C_4 = 0$; haciendo $x = L$ y $y = 0$ en la ecuación, se escribe

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_3L$$

$$C_3 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Llevando los valores de C_3 y C_4 a la ecuación (9.35) y dividiendo ambos miembros entre EI, se obtiene la ecuación de la curva elástica

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.36)$$

El valor de la máxima deflexión se obtiene haciendo $x = L/2$ en la ecuación (9.36). Se tiene

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

9.5 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

En las secciones anteriores, el análisis se limitó a vigas estáticamente determinadas. Considere ahora la viga prismática AB (figura 9.24a) empotrada en A y con apoyo sobre rodillos en B. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.24b), se observa que las reacciones incluyen cuatro incógnitas, con sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles, a saber

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{9.37}$$

Como sólo A_x puede determinarse mediante estas ecuaciones, se dice que la viga es *estáticamente indeterminada*.

Sin embargo, recuerde, de los capítulos 2 y 3, que en un problema estáticamente indeterminado pueden obtenerse las reacciones considerando las *deformaciones* de la estructura incluida. Por tanto, debe procederse con el cálculo de la pendiente y la deformación a lo largo de la viga. Siguiendo el método de la sección 9.3, el momento $M(x)$ en cualquier punto de AB se expresa en función de la distancia x desde A, la carga dada y las reacciones desconocidas. Integrando en x, se obtienen expresiones para θ y y que contienen dos incógnitas adicionales, llamadas las constantes de integración C_1 y C_2. Pero hay seis ecuaciones disponibles para hallar las reacciones y las constantes C_1 y C_2; son las tres ecuaciones de equilibrio (9.37) y las tres ecuaciones que expresan que las condiciones de frontera se satisfacen, es decir, que la pendiente y deflexión en A son nulas y que la deflexión en B es cero (figura 9.25). En consecuencia, las reacciones en los apoyos y la ecuación de la curva elástica pueden determinarse.

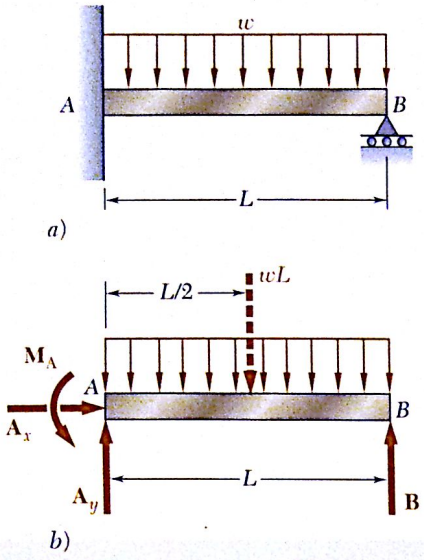


Figura 9.24

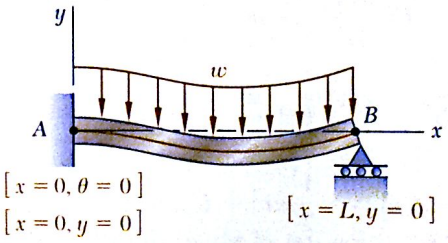


Figura 9.25

EJEMPLO 9.05

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática de la figura 9.24a.

Ecuaciones de equilibrio. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.24b, se tiene

$$\begin{aligned} \pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: &\quad A_x = 0 \\ +\uparrow \Sigma F_y = 0: &\quad A_y + B - wL = 0 \\ +\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: &\quad M_A + BL - \tfrac{1}{2}wL^2 = 0 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Ecuación de la curva elástica. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga AC (figura 9.26), se escribe

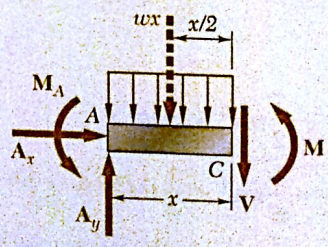


Figura 9.26

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad M + \tfrac{1}{2}wx^2 + M_A - A_y x = 0 \tag{9.39}$$

Resolviendo la ecuación (9.39) para M y llevando este valor a la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + A_y x - M_A$$

Integrando en x,

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1 \qquad (9.40)$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (9.41)$$

Refiriéndose a las condiciones de frontera de la figura 9.25, se hacen $x = 0, \theta = 0$ en la ecuación (9.40), $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.41) y se concluye que $C_1 = C_2 = 0$. Así, la ecuación (9.41) puede formularse como sigue:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}A_y x^3 - \tfrac{1}{2}M_A x^2 \qquad (9.42)$$

Pero la tercera condición de frontera requiere que $y = 0$ para $x = L$. Llevando estos valores a la ecuación (9.42),

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{6}A_y L^3 - \tfrac{1}{2}M_A L^2$$

o

$$3M_A - A_y L + \tfrac{1}{4}wL^2 = 0 \qquad (9.43)$$

Resolviendo esta ecuación simultáneamente con las tres ecuaciones de equilibrio (9.38), se obtienen las reacciones en los apoyos:

$$A_x = 0 \qquad A_y = \tfrac{5}{8}wL \qquad M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad B = \tfrac{3}{8}wL$$

En el ejemplo anterior había una reacción redundante, es decir, una reacción adicional a las que se obtendrían por equilibrio. La viga es *estáticamente indeterminada de primer grado*. Otro ejemplo similar es el del problema modelo 9.3. Si los apoyos de la viga son tales que dos reacciones son redundantes (figura 9.27*a*), se dice que ésta es *indeterminada de segundo grado*. Aunque ahora hay cinco reacciones desconocidas (figura 9.27*b*), se halla que cuatro pueden obtenerse de las condiciones de frontera (figura 9.27*c*). Así, en total hay siete ecuaciones simultáneas para determinar las cinco reacciones y las dos constantes de integración.

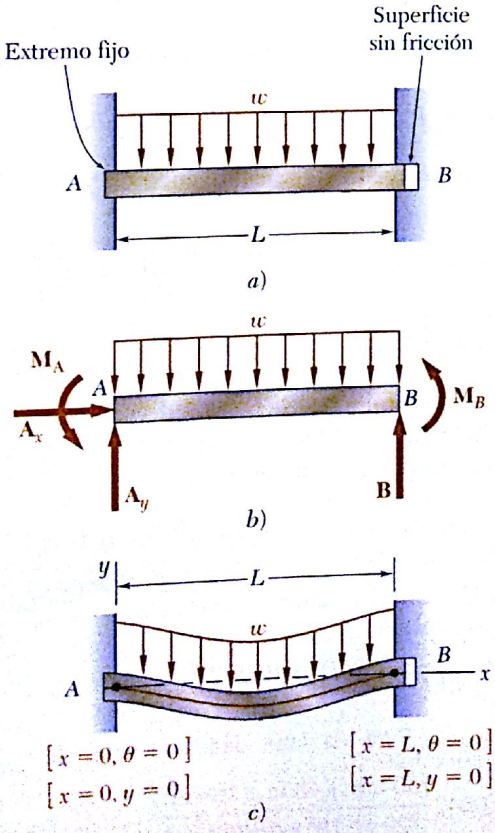
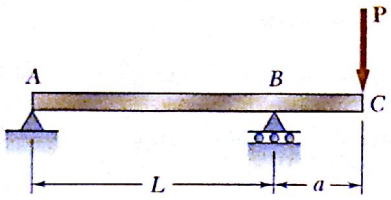


Figura 9.27



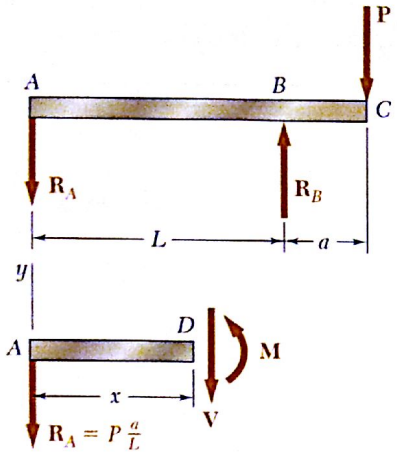
PROBLEMA MODELO 9.1

La viga parcialmente en voladizo de acero *ABC* soporta una carga concentrada **P** en el extremo *C*. Para la porción *AB* de la viga: *a*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *b*) determine la deflexión máxima, *c*) calcule $y_{máx}$ para los siguientes datos:

W14 × 68 $\quad I = 723 \text{ in.}^4 \quad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$

$P = 50 \text{ kips} \quad L = 15 \text{ ft} = 180 \text{ in.} \quad a = 4 \text{ ft} = 48 \text{ in.}$

SOLUCIÓN



Diagramas de cuerpo libre. Reacciones: $\mathbf{R}_A = Pa/L \downarrow \quad \mathbf{R}_B = P(1 + a/L) \uparrow$. Usando el diagrama de cuerpo libre de la porción *AD* de longitud *x*, se tiene

$$M = -P\frac{a}{L}x \qquad (0 < x < L)$$

Ecuación diferencial de la curva elástica. Se utiliza la ecuación (9.4) y se escribe

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P\frac{a}{L}x$$

Notando que la rigidez a flexión *EI* es constante, se integra dos veces

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + C_1 \tag{1}$$

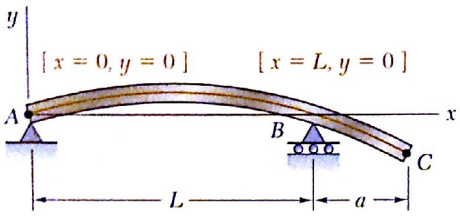
$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + C_1x + C_2 \tag{2}$$

Determinación de constantes. Para las condiciones de frontera mostradas, se tiene:

$[x = 0, y = 0]$: De la ecuación (2), se encuentra $C_2 = 0$

$[x = L, y = 0]$: Usando nuevamente la ecuación (2), se escribe

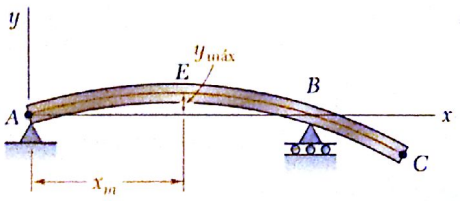
$$EI(0) = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3 + C_1L \qquad C_1 = +\frac{1}{6}PaL$$



***a*) Ecuación de la curva elástica.** Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (1) y (2),

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + \frac{1}{6}PaL \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \tag{3}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + \frac{1}{6}PaLx \qquad y = \frac{PaL^2}{6EI}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \tag{4}$$ ◀



***b*) Deflexión máxima en la porción *AB*.** La deflexión máxima $y_{máx}$ ocurre en *E*, donde la pendiente de la curva elástica es cero. Haciendo $dy/dx = 0$ en la ecuación (3), se determina la abscisa x_m del punto *E*:

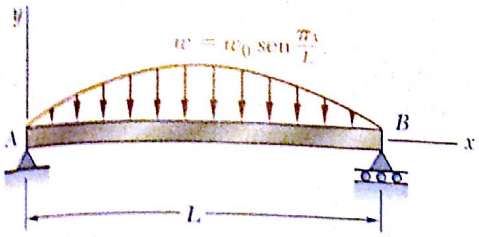
$$0 = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2\right] \qquad x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0.577L$$

Sustituyendo $x_m/L = 0.577$ en la ecuación (4), se tiene

$$y_{máx} = \frac{PaL^2}{6EI}[(0.577) - (0.577)^3] \qquad y_{máx} = 0.0642\frac{PaL^2}{EI}$$ ◀

***c*) Evaluación de $y_{máx}$.** Para los datos dados, el valor de $y_{máx}$ es

$$y_{máx} = 0.0642\frac{(50 \text{ kips})(48 \text{ in.})(180 \text{ in.})^2}{(29 \times 10^6 \text{ psi})(723 \text{ in.}^4)} \qquad y_{máx} = 0.238 \text{ in.}$$ ◀



PROBLEMA MODELO 9.2

Para la viga y carga mostradas, determine: *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión máxima.

SOLUCIÓN

Ecuación diferencial de la curva elástica. De la ecuación (9.32),

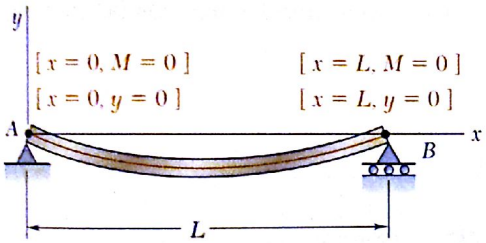
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{1}$$

Integrando la ecuación (1) dos veces:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V = +w_0\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} + C_1 \tag{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Condiciones de frontera:



$[x = 0, M = 0]$: De la ecuación (3), se halla que $C_2 = 0$

$[x = L, M = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3), se escribe

$$0 = w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi + C_1L \qquad C_1 = 0$$

Así:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{4}$$

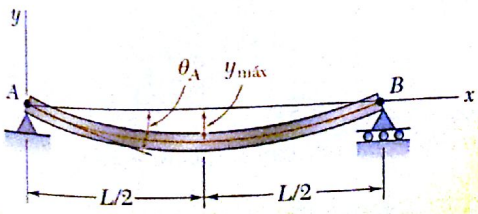
Integrando dos veces la ecuación (4):

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{L} + C_3 \tag{5}$$

$$EI\,y = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_3x + C_4 \tag{6}$$

Condiciones de frontera:

$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (6), se tiene que $C_4 = 0$



$[x = L, y = 0]$: De la ecuación (6), se halla que $C_3 = 0$

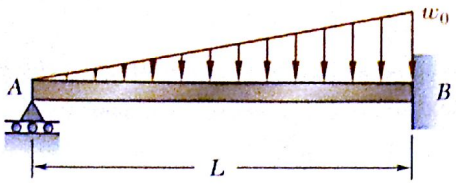
***a*) Ecuación de la curva elástica** $$EIy = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$ ◀

***b*) Pendiente en el extremo *A*.** Para $x = 0$,

$$EI\,\theta_A = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos 0 \qquad \theta_A = \frac{w_0L^3}{\pi^3EI}\measuredangle$$ ◀

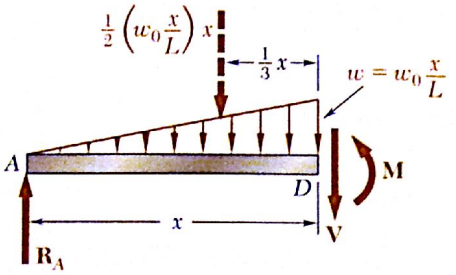
***c*) Deflexión máxima.** Para $x = \frac{1}{2}L$

$$EL y_{máx} = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \qquad y_{máx} = \frac{w_0L^4}{\pi^4EI}\downarrow$$ ◀



PROBLEMA MODELO 9.3

Para la viga uniforme AB, *a*) determine la reacción en A, *b*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *c*) halle la pendiente en A. (Nótese que la viga es estáticamente indeterminada de primer grado.)



SOLUCIÓN

Momento flector. Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado, se escribe

$$+\downarrow \Sigma M_D = 0: \qquad R_A x - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \qquad M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Ecuación diferencial de la curva elástica. Se utiliza la ecuación (9.4) y se escribe

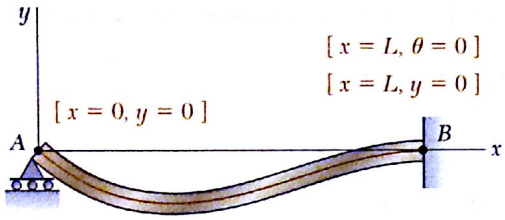
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Notando que la rigidez a flexión EI es constante, se integra dos veces y se obtiene

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \tag{1}$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \tag{2}$$

Condiciones de frontera. En el esquema se muestran las tres condiciones de frontera que deben satisfacerse



$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \tag{3}$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \frac{1}{2}R_A L^2 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \tag{4}$$

$$[x = L, y = 0]: \quad \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0 \tag{5}$$

***a*) Reacción en *A*.** Multiplicando la ecuación (4) por L, restando miembro a miembro la ecuación (5) de la ecuación obtenida y notando que $C_2 = 0$, se tiene

$$\tfrac{1}{3}R_A L^3 - \tfrac{1}{30}w_0 L^4 = 0 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{1}{10}w_0 L \uparrow \blacktriangleleft$$

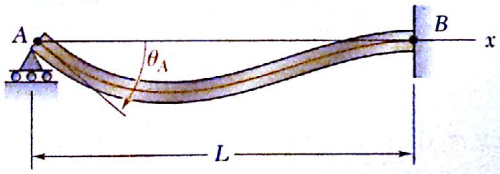
Note que la reacción es independiente de E y de I. Sustituyendo $R_A = \frac{1}{10}w_0 L$ en la ecuación (4), se tiene

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10}w_0 L)L^2 - \tfrac{1}{24}w_0 L^3 + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\tfrac{1}{120}w_0 L^3$$

***b*) Ecuación de la curva elástica.** Sustituyendo R_A, C_1 y C_2 en la ecuación (2)

$$EI\,y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}w_0 L\right)x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}w_0 L^3\right)x$$

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x) \blacktriangleleft$$



***c*) Pendiente en *A*.** Derivando la anterior ecuación con respecto a x,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

Haciendo $x = 0$ se tiene $\qquad \theta_A = \dfrac{w_0 L^3}{120EI} \qquad \theta_A = \dfrac{w_0 L^3}{120EI} \circlearrowleft \blacktriangleleft$

PROBLEMAS

En los siguientes problemas suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.1 a 9.4 Para la carga mostrada en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo *AB*, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.

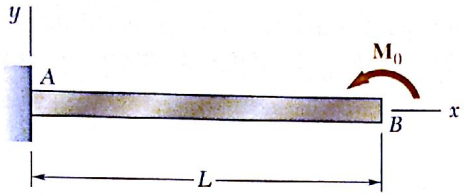


Figura P9.1

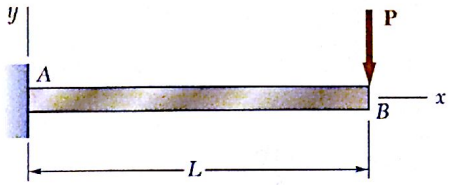


Figura P9.2

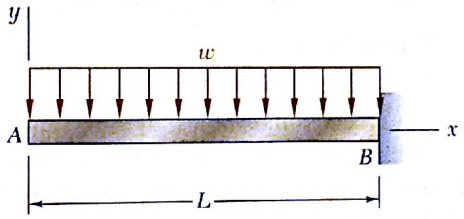


Figura P9.3

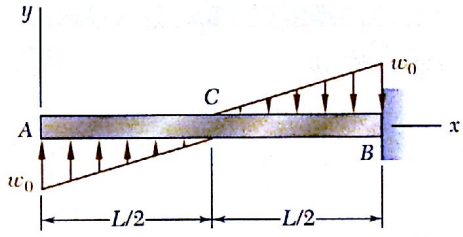


Figura P9.4

***9.5* y 9.6** Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *AB* de la viga, *b*) la deflexión en *B*, *c*) la pendiente en *B*.

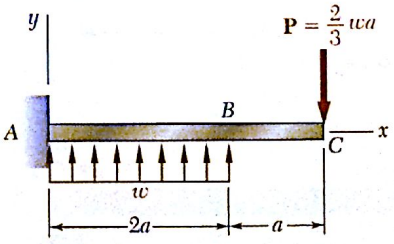


Figura *P9.5*

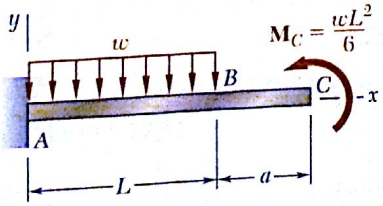


Figura P9.6

9.7 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *BC* de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio del claro, *c*) la pendiente en *B*.

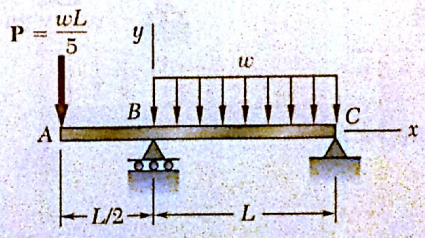


Figura P9.7

9.8 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *AB* de la viga, *b*) la pendiente en *A*, *c*) la pendiente en *B*.

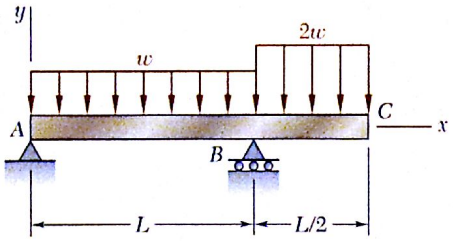


Figura *P9.8*

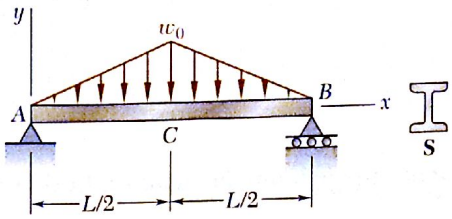


Figura P9.9

9.9 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado S8 × 18.4 y que w_0 = 4 kips/ft, L = 9 ft y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

9.10 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado W130 × 23.8 y que P = 50 kN, L = 1.25 m y E = 200 GPa, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

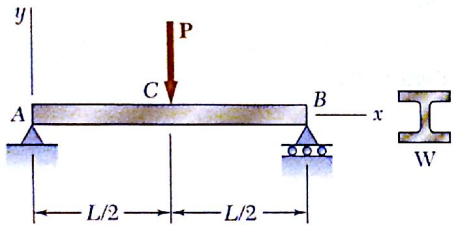


Figura P9.10

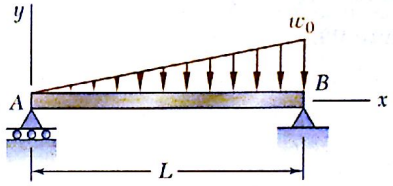


Figura P9.11

9.11 Para la viga y la carga mostradas, *a*) exprese la magnitud y ubicación de la máxima deflexión en términos de w_0, L, E e I. *b*) Calcule el valor de la deflexión máxima, suponiendo que la viga *AB* es de acero laminado W460 × 74 y que w_0 = 60 kN/m, L = 6 m y E = 200 GPa.

Figura P9.12

9.12 *a*) Determine la ubicación y magnitud de la deflexión máxima de la viga *AB* entre *A* y el centro de la viga. *b*) Si se supone que la viga *AB* es de un perfil W18 × 76, M_0 = 150 kip · ft y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la longitud máxima permisible L si la deflexión máxima no debe exceder de 0.05 in.

9.13 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

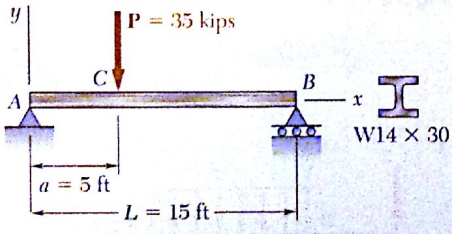


Figura P9.13

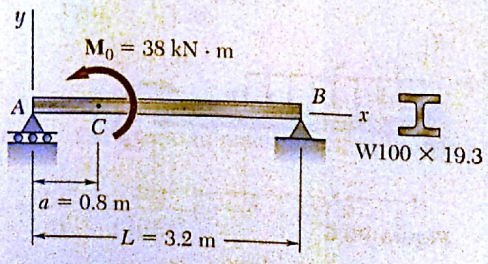


Figura *P9.14*

9.14 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice E = 200 GPa.

9.15 Si se sabe que la viga AE es de un perfil W360 × 101 de acero laminado y que $M_0 = 310$ kN · m, $L = 2.4$ m, $a = 0.5$ m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo BD, *b*) la deflexión en el punto C.

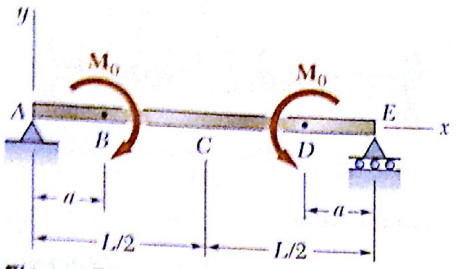


Figura *P9.15*

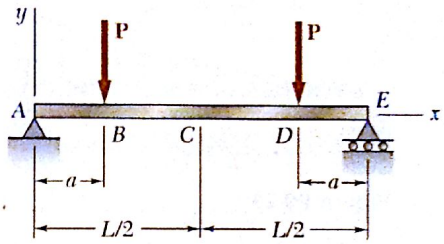


Figura P9.16

9.16 Si se sabe que la viga AE es una S200 × 27.4 de acero laminado y que $P = 17.5$ kN, $L = 2.5$ m, $a = 0.8$ m, y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo BD, *b*) la deflexión en el centro C de la viga.

9.17 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el extremo libre.

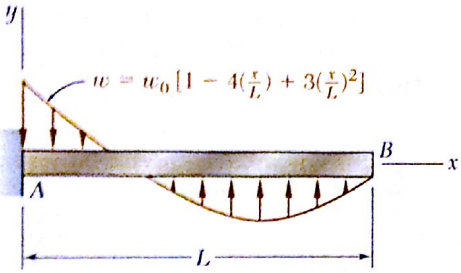


Figura P9.17

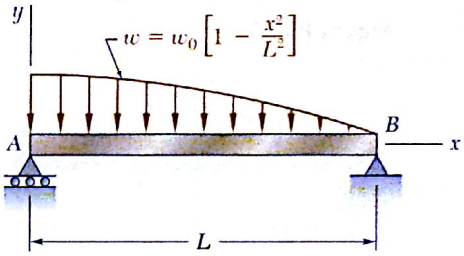


Figura P9.18

9.18 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo A, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.

9.19 a 9.22 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el apoyo deslizante.

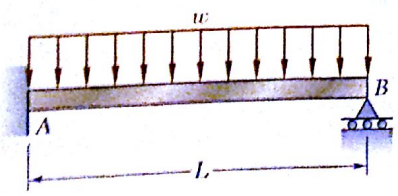


Figura P9.19

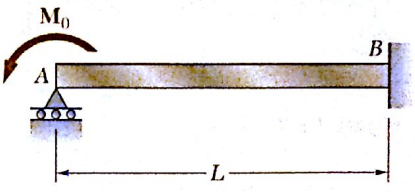


Figura P9.20

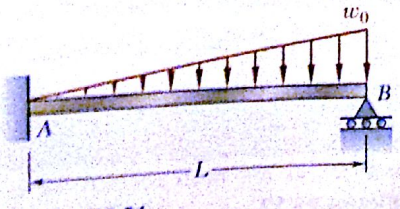


Figura *P9.21*

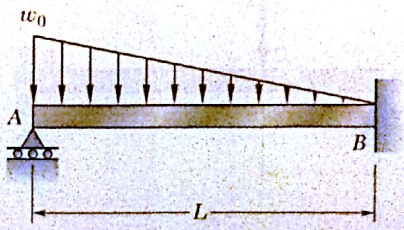


Figura *P9.22*

9.23 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el apoyo deslizante cuando $w_0 = 65$ kN/m.

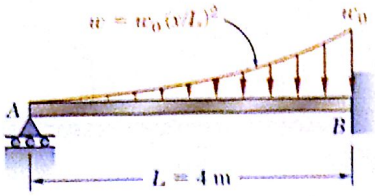


Figura P9.23

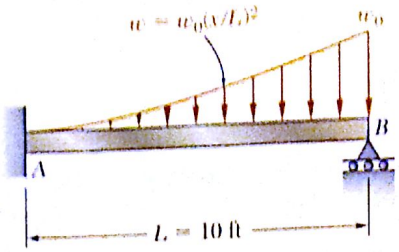


Figura P9.24

9.24 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el apoyo deslizante cuando $w_0 = 1.4$ kips/ft.

9.25 a 9.28 Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

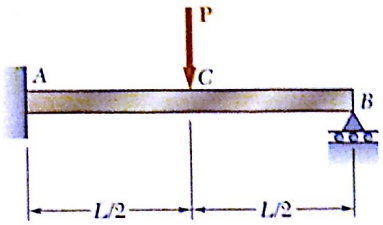


Figura P9.25

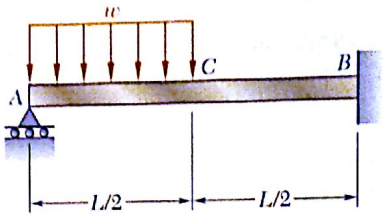


Figura P9.26

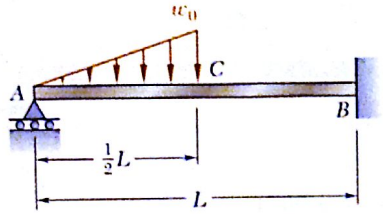


Figura P9.27

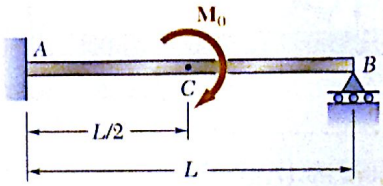


Figura P9.28

9.29 y ***9.30*** Determine la reacción en el apoyo deslizante y la deflexión en el punto *C*.

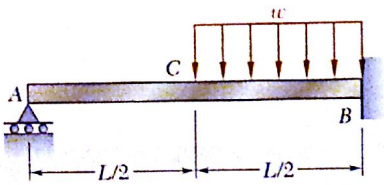


Figura P9.29

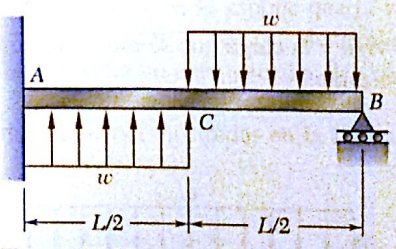


Figura *P9.30*

9.31 y **9.32** Determine la reacción en el apoyo deslizante y la deflexión en el punto *D*, si se sabe que *a* es igual a *L*/3.

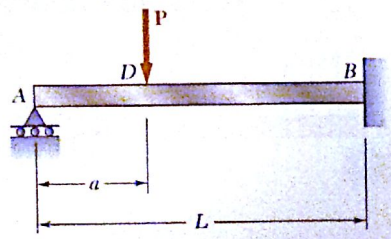


Figura *P9.31*

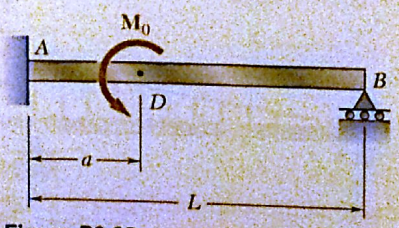


Figura P9.32

9.33 y 9.34 Determine la reacción en A y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

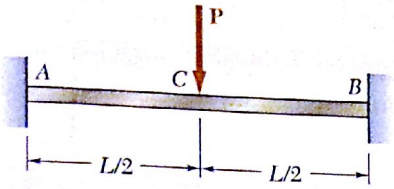


Figura P9.33

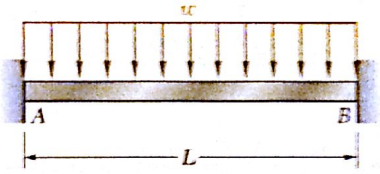


Figura P9.34

*9.6 USO DE FUNCIONES DE SINGULARIDAD PARA DETERMINAR LA PENDIENTE Y LA DEFLEXIÓN DE UNA VIGA

Al repasar lo estudiado hasta el momento en este capítulo, se advierte que el método de la integración proporciona un modo conveniente y efectivo de calcular la pendiente y la deflexión en cualquier punto de una viga prismática, *siempre que pueda representarse el momento flector mediante una función analítica única $M(x)$*. Sin embargo, cuando el modo de carga de la viga exige dos funciones para representar el momento flector, como en el ejemplo 9.03 (figura 9.17), se requieren cuatro constantes de integración y un número igual de ecuaciones que expresen continuidad en el punto D, así como condiciones de frontera en los apoyos A y B, para determinar estas constantes. Si se requieren tres o más funciones para representar el momento flector, aumenta el número de constantes y de ecuaciones adicionales, lo que da como resultado el uso de cálculos extensos. Éste puede ser el caso para la viga mostrada en la figura 9.28. En esta sección se estudiará cómo pueden simplificarse los cálculos mediante el uso de las funciones de singularidad analizadas en la sección 5.5.

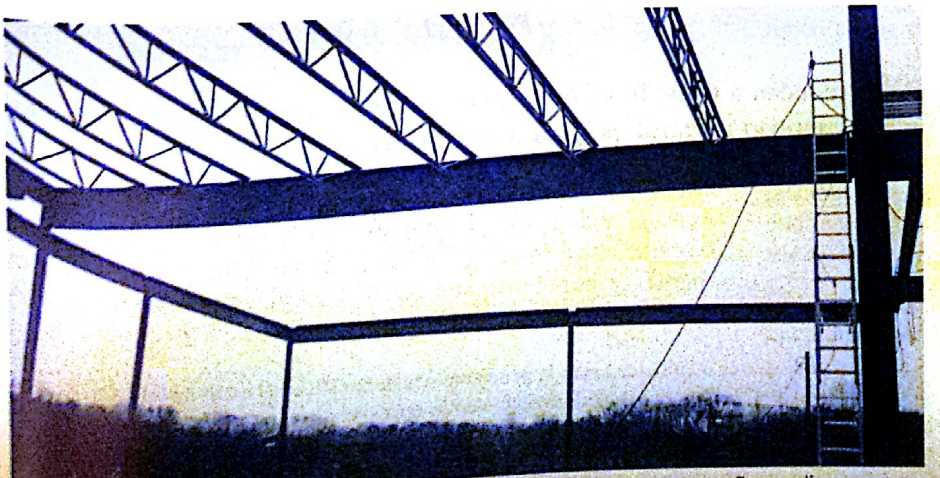


Figura 9.28 En esta estructura de un techo, cada uno de los travesaños aplica una carga concentrada a la viga en que se apoya.

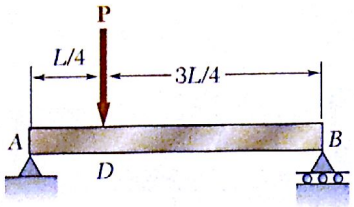


Figura 9.17 (repetida)

Considere nuevamente la viga y carga del ejemplo 9.03 (figura 9.17) y dibuje el diagrama de cuerpo libre de esa viga (figura 9.29). Usando la fun-

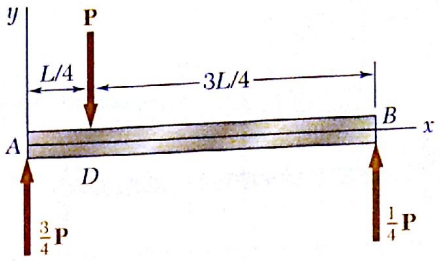


Figura 9.29

ción de singularidad apropiada, como se explicó en la sección 5.5, para representar la contribución a la fuerza cortante de la carga concentrada **P**, se escribe

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

Integrando en x y recordando de la sección 5.5 que, en ausencia de pares concentrados, la expresión obtenida para el momento flector no tendrá términos constantes, se escribe

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \tag{9.44}$$

Sustituyendo $M(x)$ de (9.44) en la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \tag{9.45}$$

e integrando en x,

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \tag{9.46}$$

$$EI\,y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{9.47}\dagger$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.30. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.47),

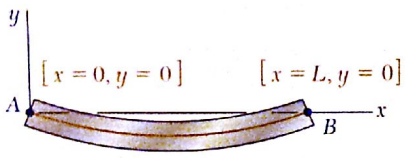


Figura 9.30

$$0 = 0 - \frac{1}{6}P\langle 0 - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + 0 + C_2$$

que se reducen a $C_2 = 0$, ya que cualquier paréntesis triangular que contenga una cantidad negativa es igual a cero. Haciendo ahora $x = L$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (9.47),

$$0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P\langle\tfrac{3}{4}L\rangle^3 + C_1L$$

† Las condiciones de continuidad para la pendiente y la deflexión en D están *incluidas* en las ecuaciones (9.46) y (9.47). Ciertamente, la diferencia entre las expresiones para la pendiente θ_1 en AD y la pendiente θ_2 en DB está representada por el término $-\frac{1}{2}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^2$ en la ecuación (9.46), y este término es cero en D. Análogamente, la diferencia entre las expresiones para la deflexión y_1 en AD y la deflexión y_2 en DB es el término $-\frac{1}{6}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^3$ en la ecuación (9.47), y este término es también nulo en D.

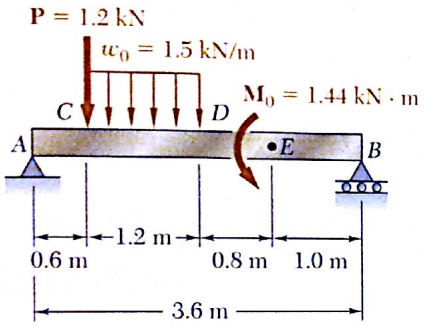
Como la cantidad entre paréntesis triangulares es positiva, éstos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Resolviendo para C_1,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

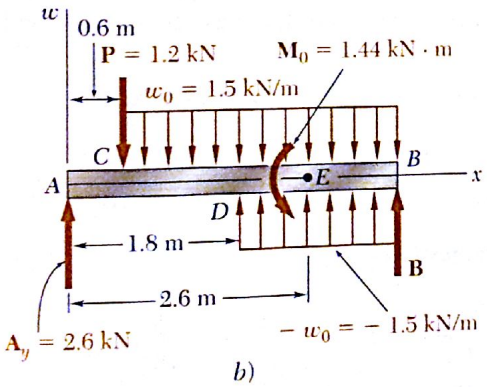
Se verifica que las expresiones obtenidas para las constantes C_1 y C_2 son las ya encontradas antes en la sección 9.3. Pero se ha eliminado la necesidad de las constantes adicionales C_3 y C_4 y no hay que escribir ecuaciones que expresen que la pendiente y la deflexión son continuas en el punto D.

EJEMPLO 9.06

Para la viga y carga mostradas en la figura 9.31*a* y usando funciones de singularidad *a*) exprese la pendiente y deflexión como funciones de la distancia x al apoyo A, *b*) halle la deflexión en el punto medio D. Considere $E = 200$ GPa e $I = 6.87 \times 10^{-6}$ m^4.



a)



b)

Figura 9.31

a) Note que la viga está cargada y apoyada como la viga del ejemplo 5.05. Refiriéndose a ese ejemplo, recuerde que la carga distribuida se reemplazó por dos cargas equivalentes de extremo abierto, mostradas en la figura 9.31*b*, y que para la fuerza cortante y el momento flector se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$

$$M(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2 + 2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

Integrando dos veces la última expresión, se obtiene

$$EI\theta = -0.25\langle x - 0.6\rangle^3 + 0.25\langle x - 1.8\rangle^3 + 1.3x^2 - 0.6\langle x - 0.6\rangle^2 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^1 + C_1 \qquad (9.48)$$

$$EIy = -0.0625\langle x - 0.6\rangle^4 + 0.0625\langle x - 1.8\rangle^4 + 0.4333x^3 - 0.2\langle x - 0.6\rangle^3 - 0.72\langle x - 2.6\rangle^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.49)$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse de las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.32. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.49) y notando que todos los paréntesis triangulares contienen cantidades negativas y que, por consiguiente, son nulas, se concluye que $C_2 = 0$. Haciendo $x = 3.6$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (9.49), se escribe

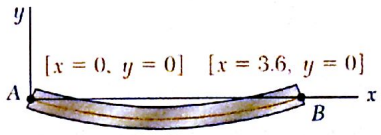


Figura 9.32

$$0 = -0.0625\langle 3.0\rangle^4 + 0.0625\langle 1.8\rangle^4 + 0.4333(3.6)^3 - 0.2\langle 3.0\rangle^3 - 0.72\langle 1.0\rangle^2 + C_1(3.6) + 0$$

Puesto que todas las cantidades entre paréntesis triangulares son positivas, éstos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Despejando C_1, se tiene $C_1 = -2.692$.

b) Sustituyendo C_1 y C_2 en la ecuación (9.49) y haciendo $x = x_D = 1.8$ m, se halla que la deflexión en el punto D está definida por la relación

$$EIy_D = -0.0625\langle 1.2\rangle^4 + 0.0625\langle 0\rangle^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2\langle 1.2\rangle^3 - 0.72\langle -0.8\rangle^2 - 2.692(1.8)$$

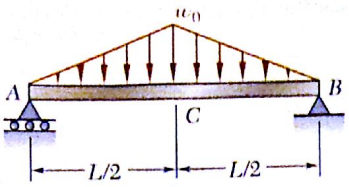
El último paréntesis triangular contiene una cantidad negativa y, por tanto, es igual a cero. Todos los otros paréntesis triangulares contienen cantidades positivas y pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Se tiene

$$EIy_D = -0.0625(1.2)^4 + 0.0625(0)^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2(1.2)^3 - 0 - 2.692(1.8) = -2.794$$

Recordando los valores numéricos de E e I, se escribe

$$(200 \text{ GPa})(6.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4)y_D = -2.794 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$y_D = -13.64 \times 10^{-3} \text{ m} = -2.03 \text{ mm}$$

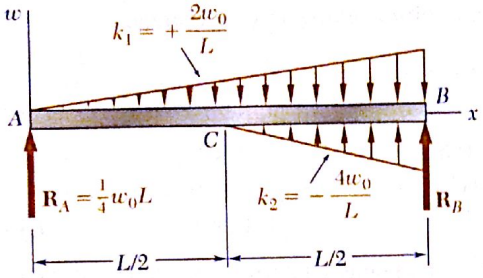


PROBLEMA MODELO 9.4

Para la viga prismática y carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en *A*, *c*) la deflexión máxima.

SOLUCIÓN

Momento flector. La ecuación que define el momento flector de la viga se obtuvo en el problema modelo 5.9. Usando el diagrama modificado de carga mostrado en la figura, se tenía en la ecuación (3)



$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx$$

***a*) Ecuación de la curva elástica.** Usando la ecuación (9.4), se escribe

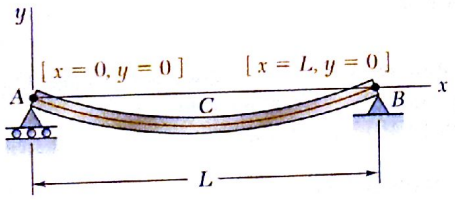
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \tag{1}$$

e integrando dos veces x,

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1 \tag{2}$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Condiciones de frontera.



$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (3) y observando que cada paréntesis triangular $\langle\ \rangle$ contiene una cantidad negativa y que por tanto es igual a cero, se halla que $C_2 = 0$.

$[x = L, y = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3), se escribe

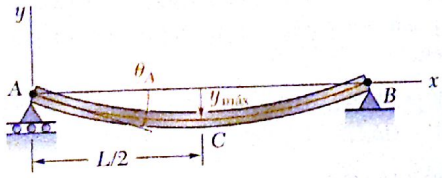
$$0 = -\frac{w_0L^4}{60} + \frac{w_0}{30L}\left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{w_0L^4}{24} + C_1L \qquad C_1 = -\frac{5}{192}w_0L^3$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (2) y (3),

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5}{192}w_0L^3 \tag{4}$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5}{192}w_0L^3x \tag{5}$$ ◀

***b*) Pendiente en *A*.** Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (4),

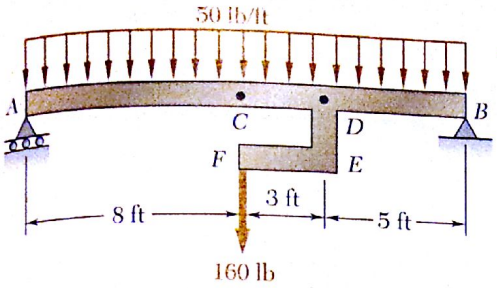


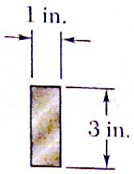
$$EI\,\theta_A = -\frac{5}{192}w_0L^3 \qquad \theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}\curvearrowleft$$ ◀

***c*) Deflexión máxima.** Debido a la simetría de los apoyos y de la carga, la deflexión máxima ocurre en el punto *C*, donde $x = \frac{1}{2}L$. Sustituyendo en la ecuación (5)

$$EI\,y_{máx} = w_0L^4\left[-\frac{1}{60(32)} + 0 + \frac{1}{24(8)} - \frac{5}{192(2)}\right] = -\frac{w_0L^4}{120}$$

$$y_{máx} = \frac{w_0L^4}{120EI}\downarrow$$ ◀

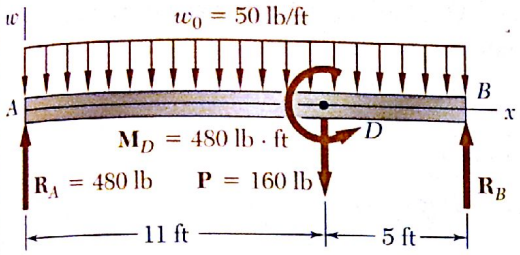




PROBLEMA MODELO 9.5

La barra rígida *DEF* se encuentra soldada en el punto *D* a la barra uniforme de acero *AB*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

SOLUCIÓN



Momento flector. La ecuación que define el momento flector se obtuvo en el problema modelo 5.10. Usando el diagrama modificado de carga mostrado y expresando x en ft, se tenía en la ecuación (3):

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}$$

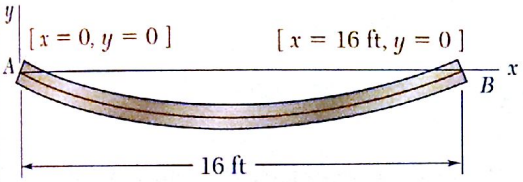
***a*) Ecuación de la curva elástica.** Usando la ecuación (8.4), se escribe

$$EI(d^2y/dx^2) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft} \tag{1}$$

e integrando dos veces en x,

$$EI\,\theta = -8.333x^3 + 240x^2 - 80\langle x - 11\rangle^2 - 480\langle x - 11\rangle^1 + C_1 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^2 \tag{2}$$

$$EI\,y = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 + C_1x + C_2 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \tag{3}$$



Condiciones de frontera.

$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (3) y observando que cada paréntesis triangular $\langle\ \rangle$ contiene una cantidad negativa y en consecuencia es igual a cero, se halla que $C_2 = 0$.

$[x = 16 \text{ ft}, y = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3) y teniendo en cuenta que cada paréntesis triangular contiene una cantidad positiva y, por tanto, puede reemplazarse por un paréntesis, se escribe

$$0 = -2.083(16)^4 + 80(16)^3 - 26.67(5)^3 - 240(5)^2 + C_1(16)$$

$$C_1 = -11.36 \times 10^3$$

Sustituyendo los valores hallados para C_1 y C_2 en la ecuación (3), se tiene

$$EI\,y = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 - 11.36 \times 10^3 x \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \tag{3'}$$ ◀

Para calcular EI recuerde que $E = 29 \times 10^6$ psi

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(1 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 = 2.25 \text{ in.}^4$$

$$EI = (29 \times 10^6 \text{ psi})(2.25 \text{ in.}^4) = 65.25 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in.}^2$$

Sin embargo, como todos los cálculos anteriores se realizaron tomando los ft como unidades de longitud, se escribe

$$EI = (65.25 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in.}^2)(1 \text{ ft}/12 \text{ in.})^2 = 453.1 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

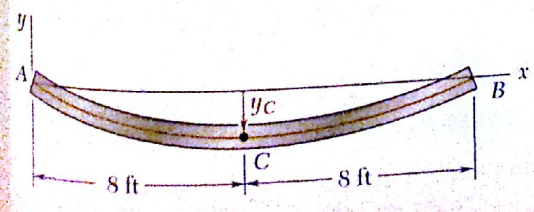
***b*) Deflexión en el centro *C*.** Haciendo $x = 8$ ft en la ecuación (3'), se tiene

$$EI\,y_C = -2.083(8)^4 + 80(8)^3 - 26.67\langle -3\rangle^3 - 240\langle -3\rangle^2 - 11.36 \times 10^3(8)$$

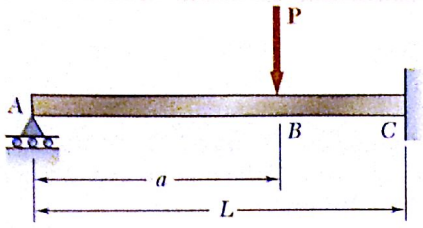
Observando que cada paréntesis triangular es cero y sustituyendo EI por su valor numérico

$$(453.1 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2)y_C = -58.45 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^3$$

y, resolviendo para y_C: $\quad y_C = -0.1290 \text{ ft} \quad y_C = -1.548 \text{ in.}$ ◀



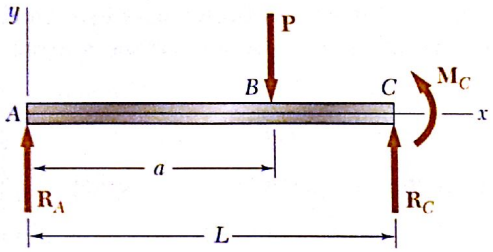
Note que la deflexión obtenida *no es* la deflexión máxima.



PROBLEMA MODELO 9.6

Para la viga uniforme ABC, *a*) exprese la reacción en A en función de P, L, a, E e I, *b*) determine la reacción en A y la deflexión bajo la carga cuando $a = L/2$.

SOLUCIÓN



Reacciones. Para la carga vertical **P**, las reacciones son como se muestran en la figura. Se observa que son estáticamente indeterminadas.

Fuerza cortante y momento flector. Usando una función paso para representar la contribución de **P** a la fuerza cortante, se escribe

$$V(x) = R_A - P\langle x - a\rangle^0$$

Integrando en x, se obtiene el momento flector:

$$M(x) = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

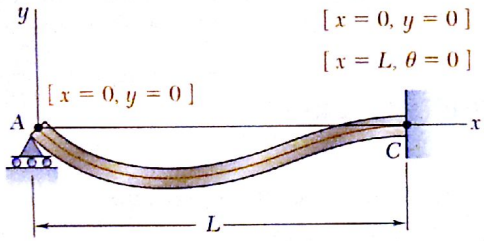
Ecuación de la curva elástica. Usando la ecuación (9.4) se escribe

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

Integrando dos veces en x,

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}P\langle x - a\rangle^2 + C_1$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}P\langle x - a\rangle^3 + C_1 x + C_2$$



Condiciones de frontera. Notando que $\langle x - a\rangle$ es cero para $x = 0$, y $(L - a)$ para $x = L$, se escribe

$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \tag{1}$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \tfrac{1}{2}R_A L^2 - \tfrac{1}{2}P(L - a)^2 + C_1 = 0 \tag{2}$$

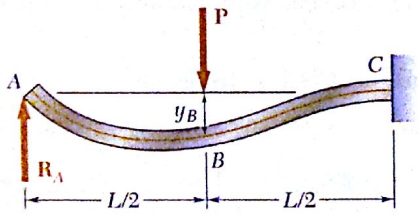
$$[x = L, y = 0]: \quad \tfrac{1}{6}R_A L^3 - \tfrac{1}{6}P(L - a)^3 + C_1 L + C_2 = 0 \tag{3}$$

***a*) Reacción en *A*.** Multiplicando la ecuación (2) por L, restando miembro a miembro la ecuación (3) de la obtenida y observando que $C = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{6}P(L - a)^2[3L - (L - a)] = 0$$

$$\mathbf{R_A} = P\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2\left(1 + \frac{a}{2L}\right)\uparrow \blacktriangleleft$$

Se advierte que la reacción es independiente de E e I.



***b*) Reacción en *A* y deflexión en *B* cuando $a = \frac{1}{2}L$.** Haciendo $a = \frac{1}{2}L$ en la expresión obtenida de R_A, se tiene

$$R_A = P(1 - \tfrac{1}{2})^2(1 + \tfrac{1}{2}) = 5P/16 \qquad \mathbf{R_A} = \tfrac{5}{16}P\uparrow \blacktriangleleft$$

Sustituyendo $a = L/2$ y $R_A = 5P/16$ en la ecuación (2) y resolviendo para C_1, se halla que $C_1 = -PL^2/32$. Haciendo $x = L/2$, $C_1 = -PL^2/32$ y $C_2 = 0$ en la expresión obtenida para y, se tiene

$$y_B = -\frac{7PL^3}{768EI} \qquad \mathbf{y_B} = \frac{7PL^3}{768EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

Note que la deflexión obtenida *no* es la deflexión máxima.

PROBLEMAS

Emplee funciones de singularidad para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.35 y 9.36 Para la viga y la carga mostradas en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

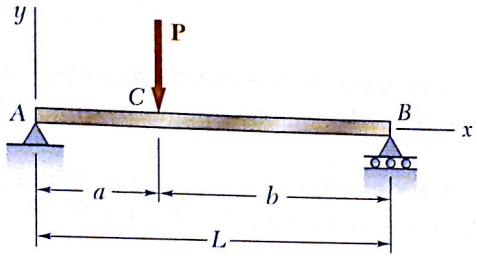


Figura P9.35

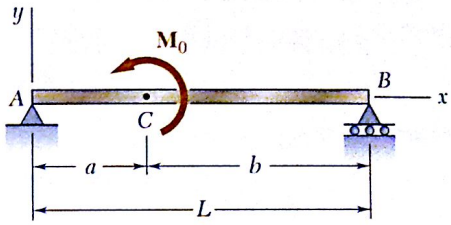


Figura P9.36

9.37 y *9.38* Para la viga y la carga mostradas, determine la deflexión en *a*) el punto *B*, *b*) el punto *C*, *c*) el punto *D*.

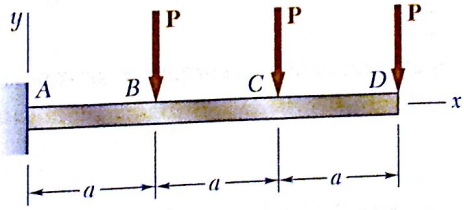


Figura P9.37

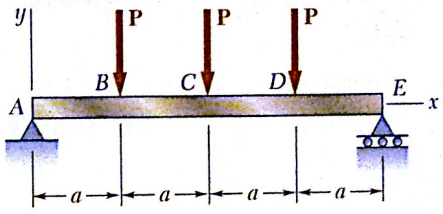


Figura *P9.38*

9.39 y *9.40* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el extremo *D*.

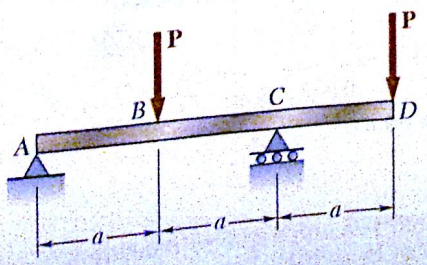


Figura P9.39

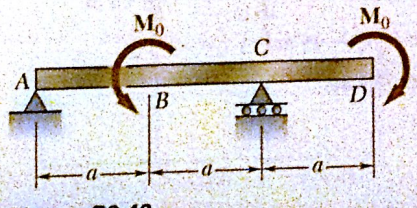


Figura *P9.40*

9.41 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

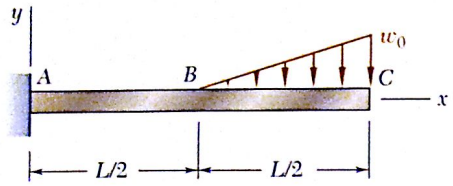


Figura P9.41

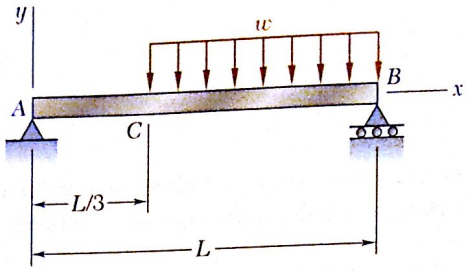


Figura P9.42

9.42 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el punto *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

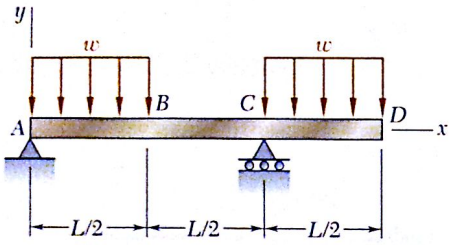


Figura *P9.43*

9.43 Para la viga y la carga representadas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *D*.

9.44 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

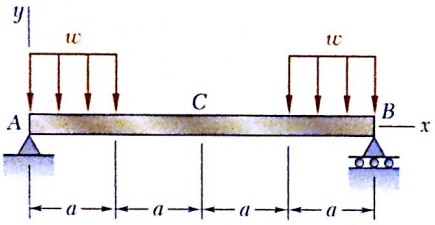


Figura P9.44

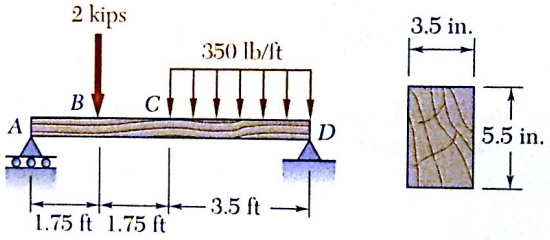


Figura P9.45

9.45 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 1.6 \times 10^6$ psi.

9.46 Para la viga y la carga ilustradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

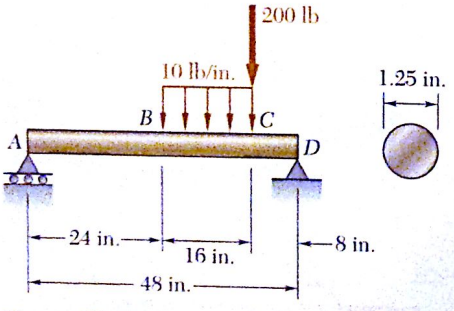


Figura *P9.46*

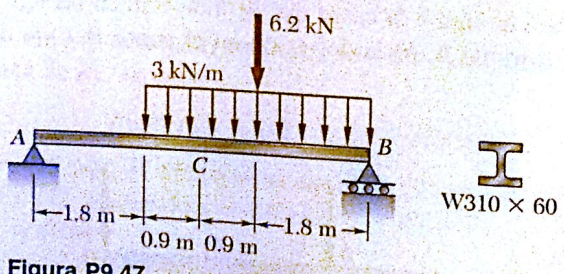


Figura P9.47

9.47 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.48 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

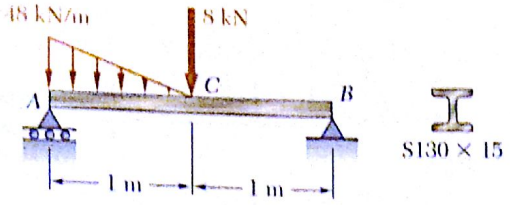


Figura P9.48

9.49 y 9.50 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto *C*.

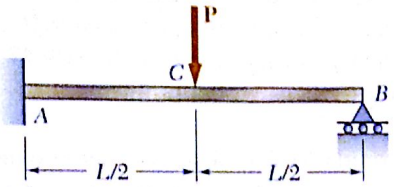


Figura P9.49

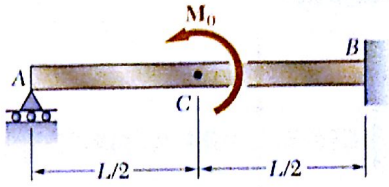


Figura P9.50

9.51 y *9.52* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto *B*.

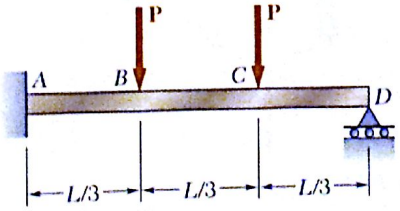


Figura P9.51

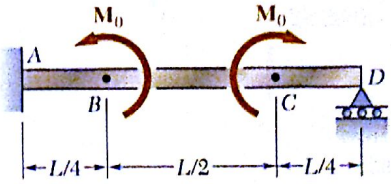


Figura *P9.52*

9.53 Para la viga y la carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 200$ GPa.

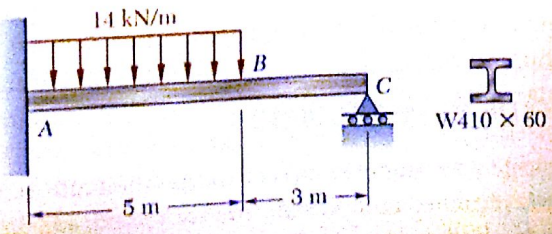


Figura P9.53

9.54 Para la viga y la carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 200$ GPa.

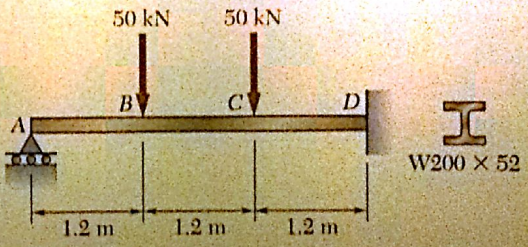


Figura P9.54

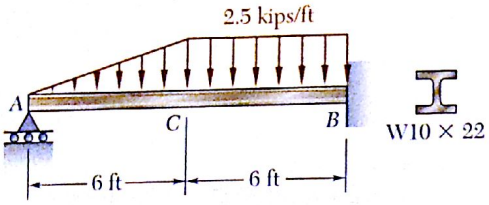


Figura *P9.55*

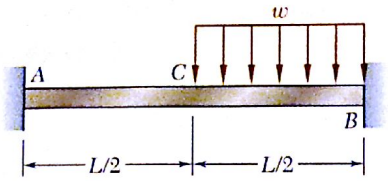


Figura P9.57

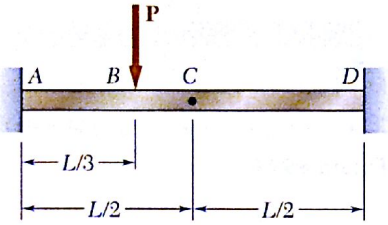


Figura P9.58

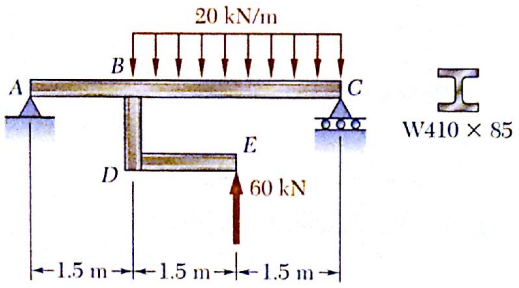


Figura *P9.63*

***9.55* y 9.56** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

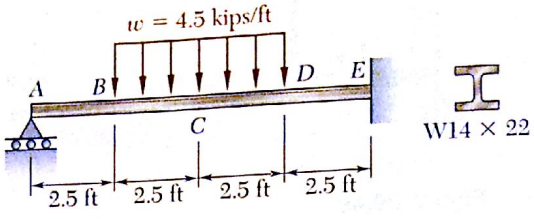


Figura P9.56

9.57 y 9.58 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

9.59 a 9.62 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la magnitud y localización de la mayor deflexión hacia abajo.

9.59 La viga y la carga del problema 9.45.
9.60 La viga y la carga del problema 9.46.
9.61 La viga y la carga del pr oblema 9.47.
9.62 La viga y la carga del problema 9.48.

9.63 La barra rígida *BDE* está soldada en el punto *B* a la viga de acero laminado *AC*. Para la carga que se ilustra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 200$ GPa.

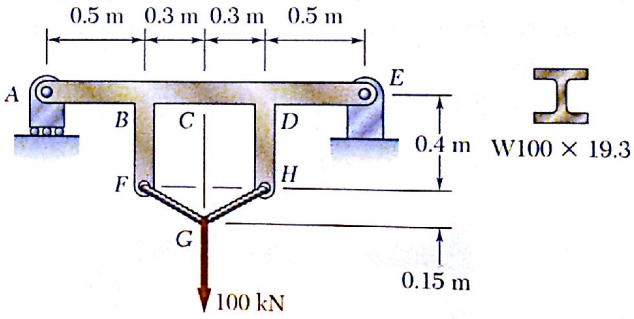


Figura *P9.64*

9.64 Las barras rígidas *BF* y *DH* están soldadas a la viga de acero laminado *AE*, como se muestra en la figura. Para la carga que se ilustra, determine *a*) la deflexión en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E =$ 200 GPa.

9.7 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Cuando una viga se somete a varias cargas concentradas o distribuidas, a menudo es conveniente calcular de manera separada la pendiente y la deflexión causadas por cada carga. La pendiente y la deflexión totales se obtienen aplicando el principio de superposición (véase la sección 2.12) y sumando los valores de la pendiente o la deflexión correspondiente a las diversas cargas.

EJEMPLO 9.07

Determine la pendiente y deflexión en D para la viga y carga mostradas (figura 9.33), sabiendo que la rigidez a flexión de la viga es $EI = 100\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

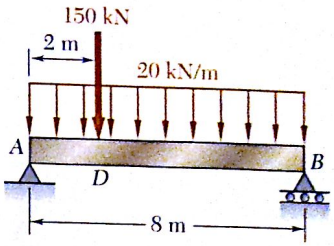


Figura 9.33

La pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga pueden obtenerse superponiendo las pendientes y deflexiones causadas respectivamente por la carga concentrada y por la carga distribuida (figura 9.34).

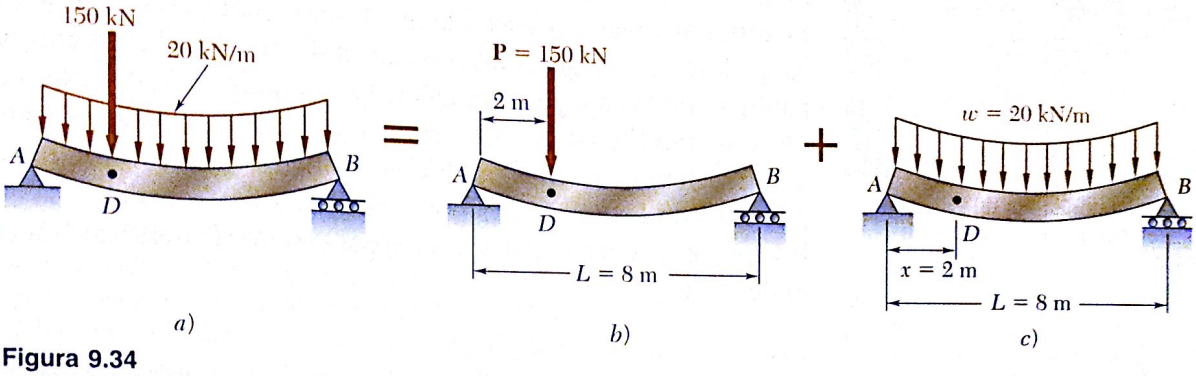


Figura 9.34

Como la carga concentrada en la figura 9.34*b* se aplica a un cuarto del claro, pueden usarse los resultados obtenidos para la viga y la carga del ejemplo 9.03 y escribirse

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150 \times 10^3)(8)^2}{32(100 \times 10^6)} = -3 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$(y_D)_P = -\frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150 \times 10^3)(8)^3}{256(100 \times 10^6)} = -9 \times 10^{-3}\ \text{m} = -9\ \text{mm}$$

Por otra parte, recordando la ecuación de la curva elástica obtenida para la carga uniformemente distribuida en el ejemplo 9.02, la deflexión en la figura 9.34*c* se expresa como:

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \tag{9.50}$$

y diferenciando con respecto a x,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \tag{9.51}$$

Haciendo $w = 20$ kN/m, $x = 2$ m y $L = 8$ m, en las ecuaciones (9.51) y (9.50), se tiene

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-352) = -2.93 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$(y_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-912) = -7.60 \times 10^{-3}\ \text{m} = -7.60\ \text{mm}$$

Combinando las pendientes y deflexiones producidas por las cargas concentradas y distribuidas, se obtiene:

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2.93 \times 10^{-3} = -5.93 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$y_D = (y_D)_P + (y_D)_w = -9\ \text{mm} - 7.60\ \text{mm} = -16.60\ \text{mm}$$

Para facilitar el trabajo de los ingenieros, los manuales de ingeniería estructural y mecánica incluyen tablas con las deflexiones y pendientes de vigas para diversas cargas y apoyos. En el apéndice D se encuentra una de estas tablas. Note que la pendiente y la deflexión de la viga de la figura 9.33 hubieran podido determinarse a partir de allí. Ciertamente, usando la información dada en los casos 5 y 6, pudo haberse expresado la deflexión de la viga para cualquier valor $x \leq L/4$. Tomando la derivada de la expresión así obtenida, se habría determinado la pendiente de la viga en el mismo intervalo. También se observa que la pendiente en los extremos de la viga puede obtenerse sumando los valores correspondientes de la tabla. Sin embargo, la

deflexión máxima de la viga de la figura 9.33 *no puede* obtenerse sumando las deflexiones máximas de los casos 5 y 6, pues éstas ocurren en puntos diferentes de la viga.†

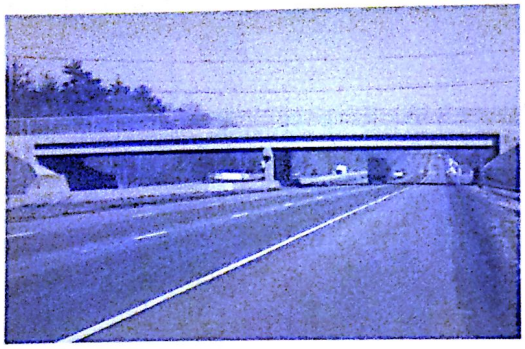


Figura 9.35 Las vigas continuas que soportan este puente de autopista tiene tres soportes que son indeterminados.

9.8 APLICACIÓN DE LA SUPERPOSICIÓN A VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

A menudo será útil el método de la superposición para determinar las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada. Considerando primero una viga indeterminada de primer grado (véase sección 9.5), como la que se muestra en la figura 9.35 se seguirá el método descrito en la sección 2.9. Se escoge una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las otras, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La pendiente o la deflexión donde el apoyo se ha modificado o eliminado se obtiene calculando separadamente las deformaciones causadas por las cargas dadas y la reacción redundante, y superponiendo los resultados obtenidos. Una vez calculadas las reacciones en los apoyos, pueden determinarse la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.

† El valor aproximado de la deflexión máxima de la viga se obtiene elaborando la gráfica de los valores de y correspondientes a varios de x. La determinación de la localización exacta y magnitud de la deflexión máxima requiere igualar a cero la expresión de la pendiente y resolver esta ecuación para x.

EJEMPLO 9.08

Determine las reacciones en los apoyos de la viga prismática y la carga mostradas en la figura 9.36. (Ésta es la misma viga del ejemplo 9.05 de la sección 9.5.)

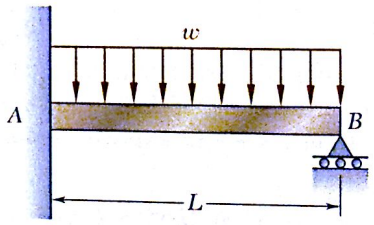


Figura 9.36

La reacción en B se considera redundante y se libera la viga de ese apoyo. La reacción $\mathbf{R}_B$ se establece como una carga desconocida (figura 9.37*a*) y se obtendrá de la condición de que la deflexión de la viga en B debe ser cero.

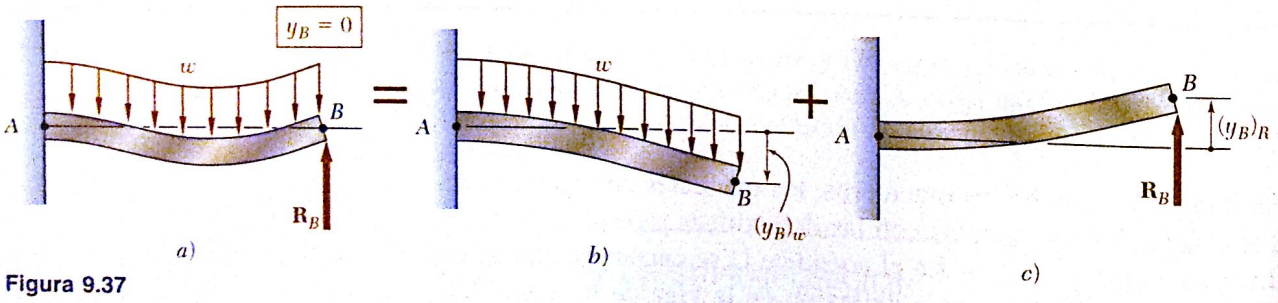


Figura 9.37

La solución se efectúa tomando por separado la deflexión $(y_B)_w$ producida en B por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.37*b*) y la deflexión $(y_B)_R$ producida en el mismo punto por la reacción redundante $\mathbf{R}_B$ (figura 9.37*c*).

De la tabla del apéndice D (casos 2 y 1) se halla que

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

Escribiendo que la deflexión en B es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

y resolviendo para R_B,

$$R_B = \tfrac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_B = \tfrac{3}{8}wL \uparrow$$

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.38) y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B - wL = 0 \tag{9.52}$$

$$R_A = wL - R_B = wL - \tfrac{3}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$

$$\mathbf{R}_A = \tfrac{5}{8}wL \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A + R_B L - (wL)(\tfrac{1}{2}L) = 0 \tag{9.53}$$

$$M_A = \tfrac{1}{2}wL^2 - R_B L = \tfrac{1}{2}wL^2 - \tfrac{3}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}wL^2$$

$$\mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

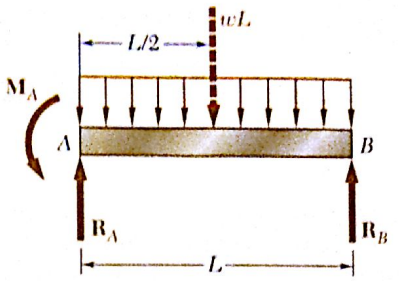


Figura 9.38

Solución alternativa. El par en el extremo empotrado A puede considerarse redundante y reemplazarse el extremo fijo por un apoyo de segundo género. El par $\mathbf{M}_A$ es ahora una carga desconocida (figura 9.39*a*) y se calculará de la condición de que la pendiente debe ser cero en el punto A. La solución se consigue considerando separadamente la pendiente $(\theta_A)_w$ producida en A por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.39*b*) y la pendiente $(\theta_A)_M$ producida por el mismo punto por el par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.39*c*).

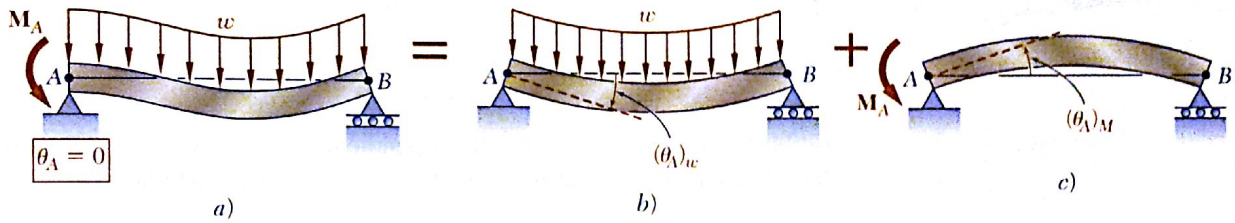


Figura 9.39

Usando la tabla del apéndice D (casos 6 y 7) y observando que A y B deben intercambiarse en el caso 7, se halla que:

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \qquad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

Escribiendo que la pendiente en A es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se halla que:

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

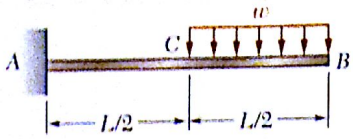
$$\theta_A = -\frac{wL^3}{25EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

y, despejando a M_A,

$$M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

Los valores R_A y R_B pueden encontrarse mediante las ecuaciones de equilibrio (9.52) y (9.53).

La viga estudiada en el ejemplo previo era indeterminada de primer grado. En el caso de una viga indeterminada de segundo grado (véase sección 9.5), dos reacciones deben designarse como redundantes y los soportes correspondientes eliminados y modificados como corresponda. Las reacciones redundantes se tratan entonces como cargas desconocidas que, simultáneamente con las otras cargas, deben producir deformaciones compatibles con los apoyos originales (véase problema modelo 9.9).

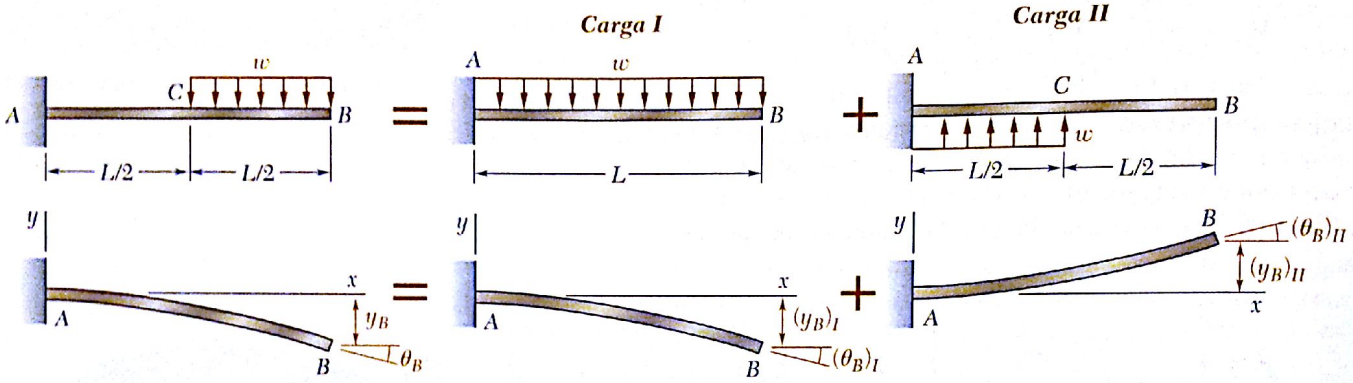


PROBLEMA MODELO 9.7

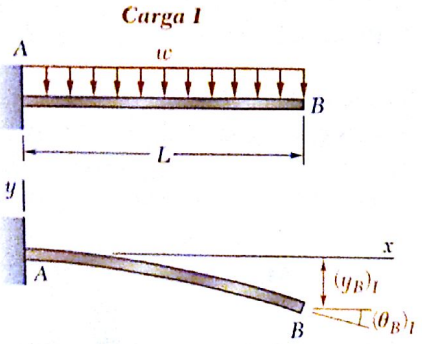
Para la viga y carga mostradas en la figura, determine la pendiente y la deflexión del punto B.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. La carga dada puede obtenerse superponiendo las cargas mostradas en la siguiente "película de ecuación de carga". La viga AB es, naturalmente, la misma en cada parte de la figura.

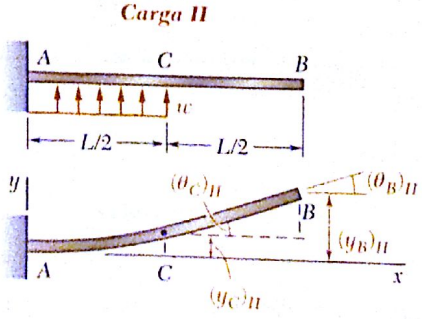


Para cada una de las cargas I y II, la pendiente y la deflexión en B se determinan usando la tabla de *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.



Carga I

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$



Carga II

$$(\theta_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

En la porción CB, el momento flector para la carga II es cero y, por tanto, la curva elástica es una línea recta.

$$(\theta_B)_{II} = (\theta_C)_{II} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_B)_{II} = (y_C)_{II} + (\theta_C)_{II}\left(\frac{L}{2}\right)$$

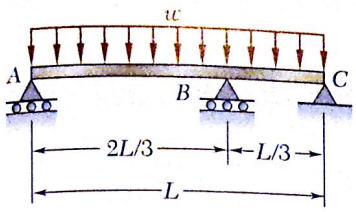
$$= \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\left(\frac{L}{2}\right) = +\frac{7wL^4}{384EI}$$

Pendiente en el punto *B*

$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \qquad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \curvearrowright \blacktriangleleft$$

Deflexión en *B*

$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{41wL^4}{384EI} \qquad y_B = \frac{41wL^4}{384EI} \downarrow \blacktriangleleft$$

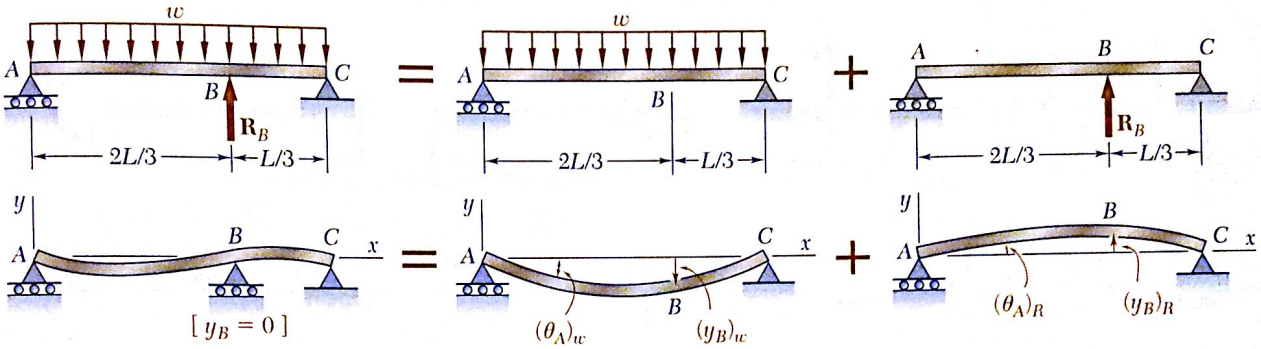


PROBLEMA MODELO 9.8

Para la viga y carga mostradas en la figura, halle *a*) la reacción de cada apoyo, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. La reacción $\mathbf{R}_B$ se escoge como redundante y se considera como carga desconocida. Las deflexiones debidas a la carga distribuida y a la reacción $\mathbf{R}_B$ se examinan separadamente, como se indica en la figura.



Para cada carga, la deflexión en el punto *B* se halla usando la tabla de *deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga distribuida. Se utiliza el caso 6 del apéndice D

$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

En el punto *B*, $x = \frac{2}{3}L$:

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0.01132\frac{wL^4}{EI}$$

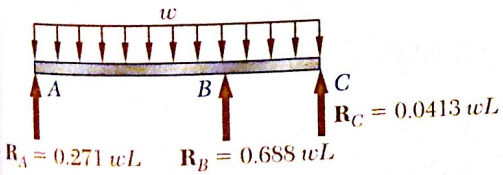
Carga por la reacción redundante. Del caso 5, apéndice D, con $a = \frac{2}{3}L$ y $b = \frac{1}{3}L$, se tiene

$$(y_B)_R = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL}\left(\frac{2}{3}L\right)^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0.01646\frac{R_BL^3}{EI}$$

***a*) Reacciones de los apoyos.** Recordando que $y_B = 0$, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R$$

$$0 = -0.01132\frac{wL^4}{EI} + 0.01646\frac{R_BL^3}{EI} \qquad \mathbf{R}_B = 0.688wL\uparrow \blacktriangleleft$$



Como la reacción R_B ahora es conocida, se utiliza el método de la estática para determinar las otras reacciones: $\mathbf{R}_A = 0.271wL\uparrow$ $\mathbf{R}_C = 0.0413wL\uparrow$ ◀

***b*) Pendiente en el extremo *A*.** Refiriéndose de nuevo al apéndice D, se tiene

Carga distribuida. $(\theta_A)_w = -\dfrac{wL^3}{24EI} = -0.04167\dfrac{wL^3}{EI}$

Carga de reacción redundante. Para $P = -R_B = -0.688wL$ y $b = \frac{1}{3}L$

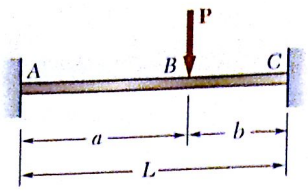
$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0.688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2\right] \qquad (\theta_A)_R = 0.03398\frac{wL^3}{EI}$$

Finalmente, $\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$

$$\theta_A = -0.04167\frac{wL^3}{EI} + 0.03398\frac{wL^3}{EI} = -0.00769\frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = 0.00769\frac{wL^3}{EI}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

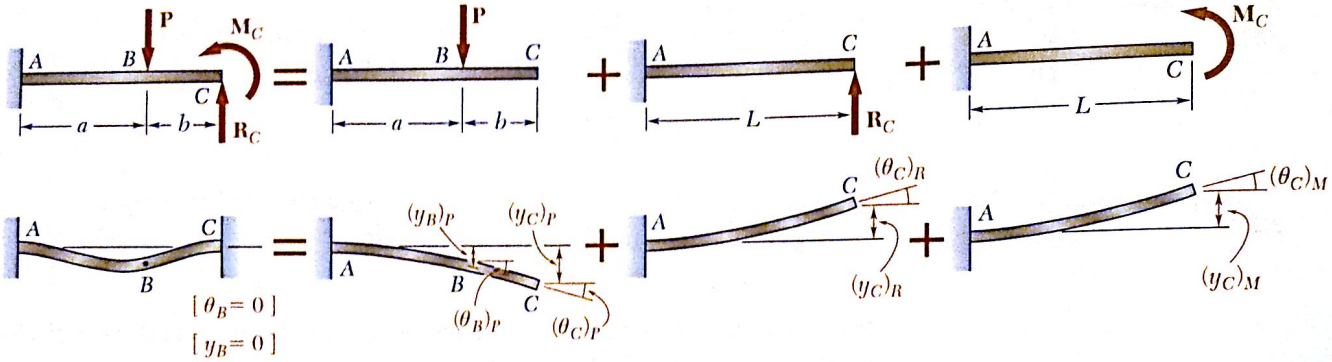
PROBLEMA MODELO 9.9



Para la viga y carga mostradas, determine la reacción en el empotramiento C.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Suponiendo que la carga axial en la viga es cero, la viga ABC es indeterminada de segundo grado y se escogen como redundantes la fuerza vertical $\mathbf{R}_C$ y el par $\mathbf{M}_C$. Las deformaciones producidas por la carga $\mathbf{P}$, la fuerza $\mathbf{R}_C$ y el par $\mathbf{M}_C$ se consideran separadamente como se muestra.



Para cada carga, la pendiente y la deflexión en C se encuentran en la tabla *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga P. Se observa que, para esta carga, la porción BC de la viga es recta.

$$(\theta_C)_P = (\theta_B)_P = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (y_C)_P = (y_B)_P + (\theta_B)_P b$$

$$= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)$$

Fuerza R_C

$$(\theta_C)_R = +\frac{R_C L^2}{2EI} \qquad (y_C)_R = +\frac{R_C L^3}{3EI}$$

Par M_C

$$(\theta_C)_M = +\frac{M_C L}{EI} \qquad (y_C)_M = +\frac{M_C L^2}{2EI}$$

Condiciones de frontera. En el extremo C la pendiente y la deflexión deben ser cero.

$[x = L, \theta_C = 0]$:

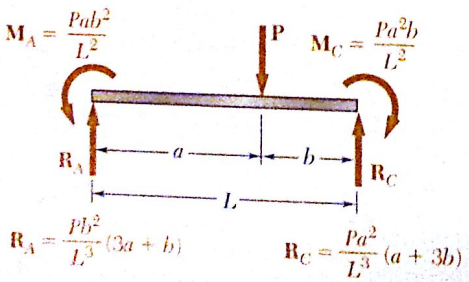
$$\theta_C = (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \qquad (1)$$

$[x = L, y_C = 0]$:

$$y_C = (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \qquad (2)$$



Componentes de la reacción en C. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) se encuentran las reducciones

$$R_C = +\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \qquad \mathbf{R}_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)\uparrow \blacktriangleleft$$

$$M_C = -\frac{Pa^2 b}{L^2} \qquad \mathbf{M}_C = \frac{Pa^2 b}{L^2}\downarrow \blacktriangleleft$$

La reacción en A puede hallarse ahora usando los métodos de estática.

PROBLEMAS

Utilice el método de superposición para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.65 a 9.68 Para la viga y la carga mostradas en las figuras, determine *a)* la deflexión en *C*, *b)* la pendiente en el extremo *A*.

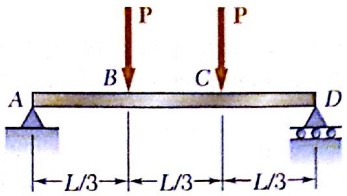


Figura P9.65

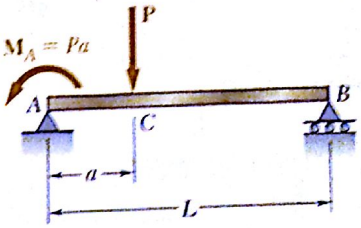


Figura P9.66

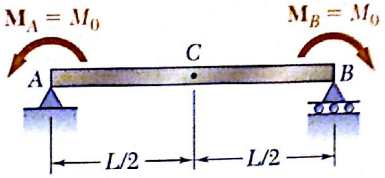


Figura P9.67

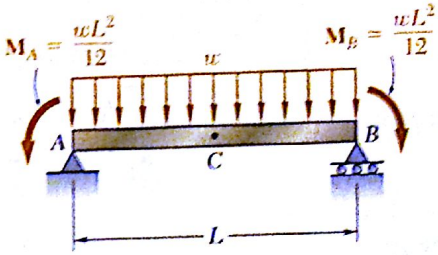


Figura P9.68

9.69* y *9.70 Para la viga en voladizo y la carga mostradas en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en el extremo libre.

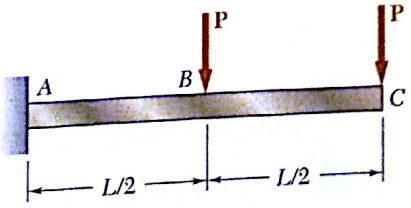


Figura *P9.69*

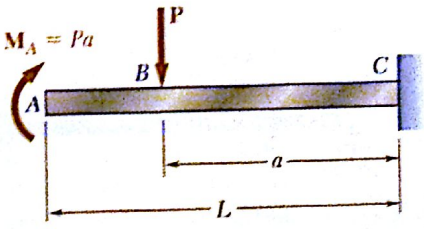


Figura *P9.70*

9.71 y 9.72 Para la viga en voladizo y la carga mostradas en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en el punto *B*.

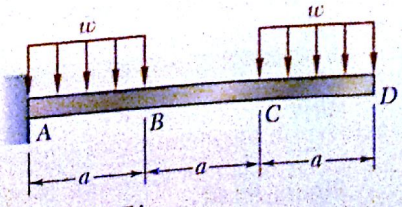


Figura P9.71

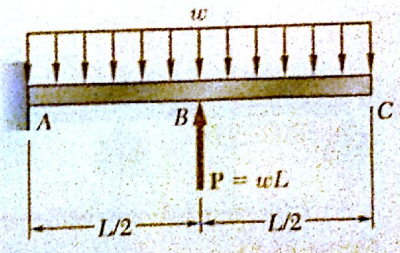


Figura P9.72

9.73 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el extremo C. Use $E = 200$ GPa.

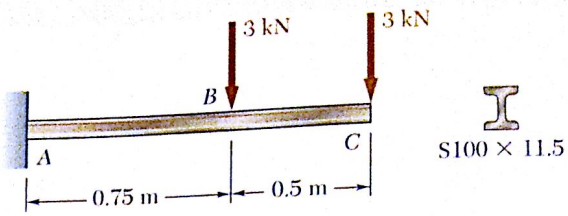


Figura P9.73 y *P9.74*

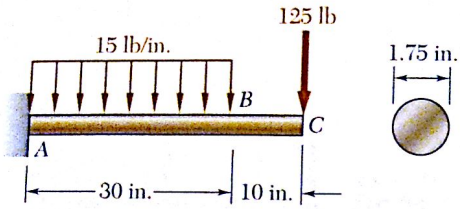


Figura P9.75 y P9.76

9.74 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el punto B. Use $E = 200$ GPa.

9.75 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el extremo C. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.76 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el punto B. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.77 y *9.78* Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto C. Utilice $E = 200$ GPa.

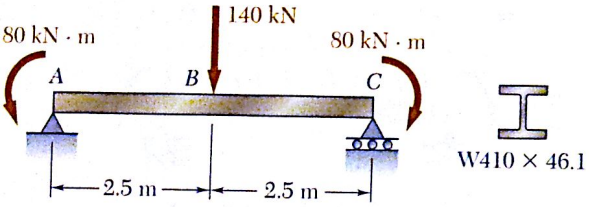


Figura P9.77

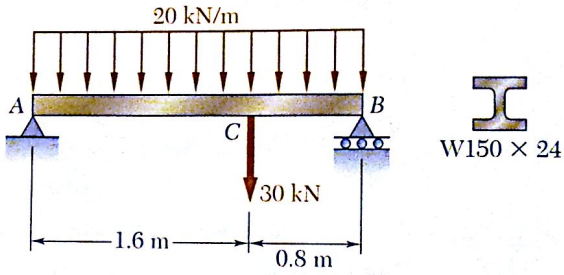


Figura *P9.78*

9.79 y 9.80 Para la viga uniforme que se muestra en las figuras, determine *a*) la reacción en A, *b*) la reacción en B.

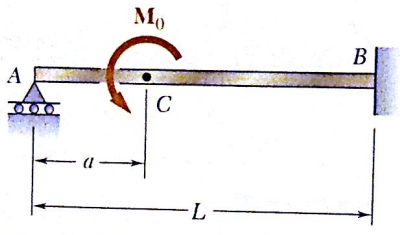


Figura P9.79

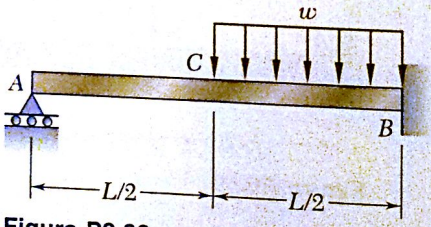


Figura P9.80

9.81 y *9.82* Para la viga uniforme que se muestra en las figuras, determine la reacción en cada uno de los tres apoyos.

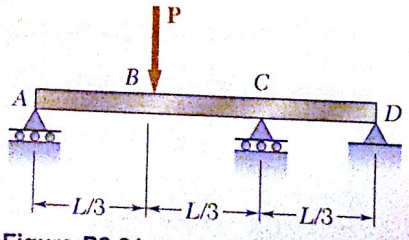


Figura P9.81

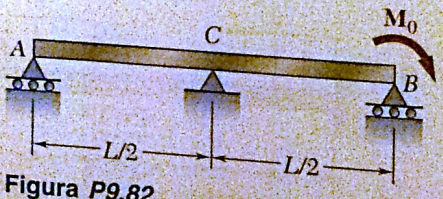


Figura *P9.82*

9.83 y 9.84 Para la viga que se muestra en las figuras, determine la reacción en B.

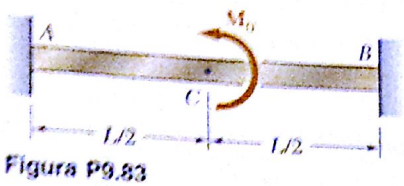


Figura P9.83

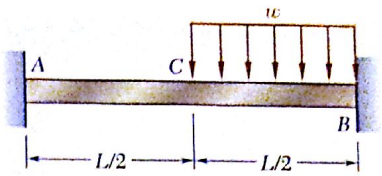


Figura P9.84

9.85 La viga DE descansa sobre la viga en voladizo AC, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa una varilla cuadrada con 10 mm de lado, determine la deflexión en el extremo C si el par de 25 N · m se aplica *a*) en el extremo E de la viga DE, *b*) en el extremo C de la viga AC. Utilice $E = 200$ GPa.

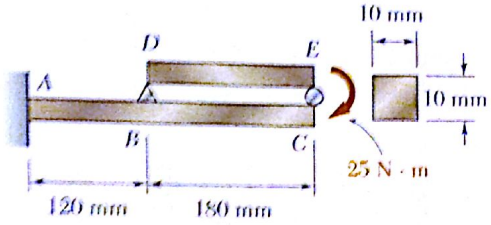


Figura P9.85

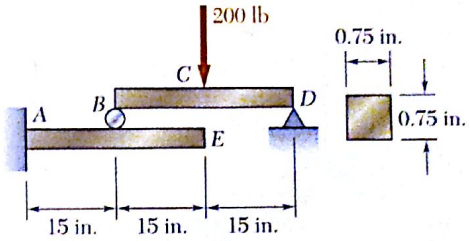


Figura P9.86

9.86 La viga BD descansa sobre la viga en voladizo AE, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa una varilla cuadrada con 0.75 in. de lado, determine para la carga que se indica, *a*) la deflexión en el punto C, *b*) la deflexión en el punto E. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.87 Las dos vigas que se muestran en la figura tienen la misma sección transversal y están unidas mediante una bisagra en C. Para las cargas mostradas, determine *a*) la pendiente en el punto A, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

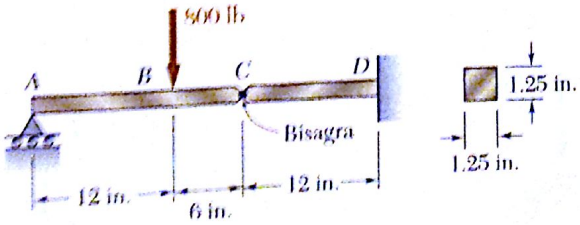


Figura P9.87

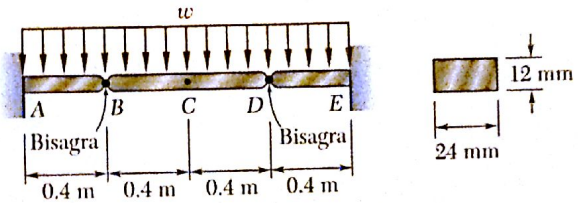


Figura P9.88

9.88 Una viga central BD está unida por medio de bisagras a dos vigas en voladizo AB y DE. Todas las vigas tienen la sección transversal que se indica. Para la carga que se muestra en la figura, determine el máximo valor de w si la deflexión en C no debe exceder 3 mm. Considere $E = 200$ GPa.

9.89 Antes de aplicar la carga uniformemente distribuida w, había un espacio $\delta_0 = 1.2$ mm entre los extremos de las barras en voladizo AB y CD. Si $E = 105$ GPa y $w = 30$ kN/m, determine *a*) la reacción en A y *b*) la reacción en D.

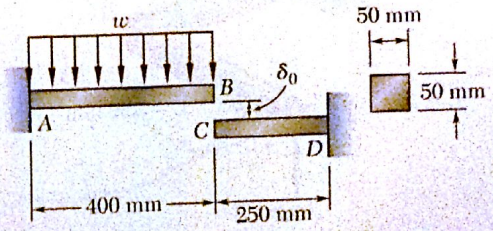


Figura P9.89

9.90 Antes de aplicar la carga de 2 kips/ft, había un espacio $\delta_0 = 0.8$ in. entre la viga W16 × 40 y el apoyo en C. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la reacción en cada apoyo después de aplicar la carga uniformemente distribuida.

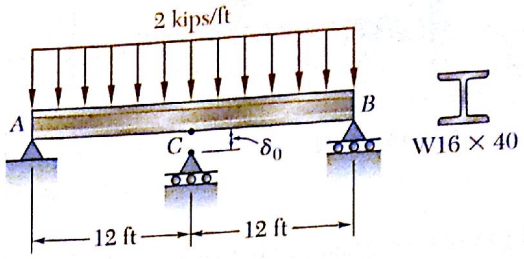


Figura *P9.90*

9.91 Las vigas AB y DE que se muestran en la figura tienen la misma rigidez a flexión. Para la carga mostrada, determine la reacción *a*) en B, *b*) en E.

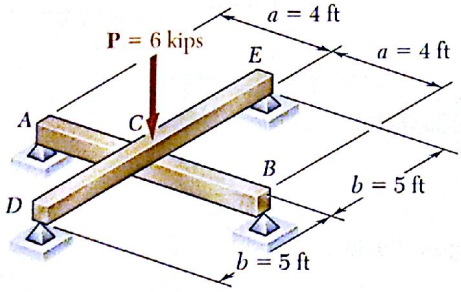


Figura *P9.91*

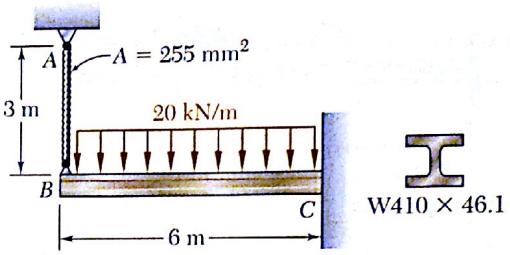


Figura P9.92

9.92 La viga en voladizo BC está unida al cable de acero AB, como se muestra en la figura. Si se sabe que el cable estaba inicialmente tenso, determine la tensión en el cable causada por la carga distribuida que se indica. Use $E = 200$ GPa.

9.93 Una varilla BC con $\frac{7}{8}$ in. de diámetro está unida a la palanca AB y al apoyo fijo en C. La palanca AB tiene una sección transversal uniforme de $\frac{3}{8}$ in. de espesor y 1 in. de profundidad. Para la carga que se muestra en la figura, determine la deflexión en el punto A. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

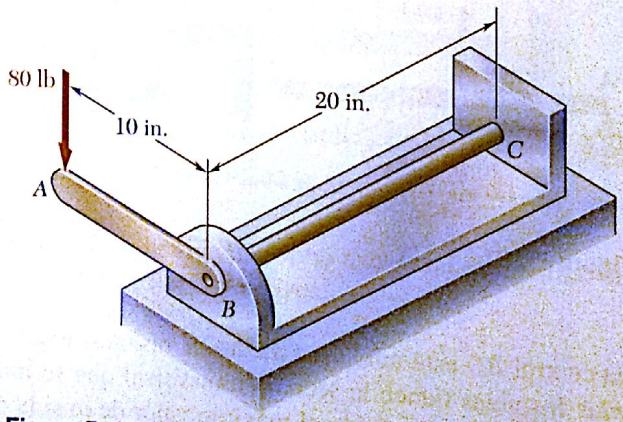


Figura P9.93

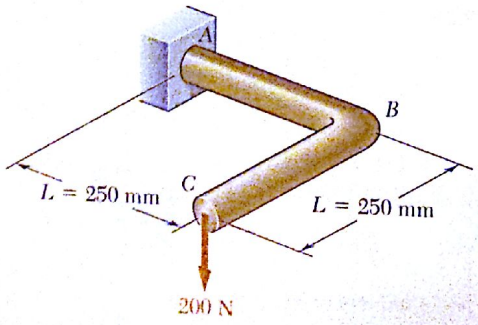


Figura P9.94

9.94 Una varilla de 16 mm de diámetro se dobla en la forma mostrada en la figura. Determine la deflexión del extremo C después de aplicar la fuerza de 200 N. Utilice $E = 200$ GPa y $G = 80$ GPa.

*9.9 TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA

De la sección 9.2 a la 9.6, se usó un método matemático basado en la inte-
gración de ecuaciones diferenciales para determinar la deflexión y pendien-
te de una viga en cualquier punto dado. El momento flector se expresó co-
mo una función $M(x)$ de la distancia x medida a lo largo de la viga, y dos
integraciones sucesivas condujeron a las funciones $\theta(x)$ y $y(x)$ que represen-
tan, respectivamente, la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la vi-
ga. En esta sección se verá cómo pueden usarse las propiedades geométricas
de la curva elástica para determinar la deflexión y pendiente de una viga en
un punto específico (figura 9.40).

Figura 9.40 Las deflexiones de las vigas que soportan los pisos de un edificio deben tomarse en cuenta en el proceso de diseño.

Considere una viga AB sometida a alguna carga arbitraria (figura 9.41*a*).
Se dibuja el diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo
largo de la viga, que se obtuvo dividiendo el momento flexionante M entre
la rigidez de flexión EI (figura 9.41*b*). Se observa que, excepto para distin-
tas escalas en la ordenada, este diagrama será el mismo que el del momento
flector si la rigidez a flexión de la viga es constante.

Al recordar la ecuación (9.4) de la sección 9.3, y el hecho de que
$dy/dx = \theta$, se tiene:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

o bien

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.54}\dagger$$

Al considerar dos puntos arbitrarios C y D en la viga e integrando am-
bos miembros de la ecuación (9.54) de C a D, se tiene

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

o bien

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.55}$$

en donde θ_C y θ_D denotan la pendiente en los puntos C y D, respectivamen-
te (figura 9.41*c*). Pero el miembro del lado derecho de la ecuación (9.55) re-
presenta el área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D, y el miembro del la-
do izquierdo es el ángulo entre las tangentes a la curva elástica en C y D
(figura 9.41*d*). Si se denota este ángulo como $\theta_{D/C}$, se tiene

$$\theta_{D/C} = \text{área debajo del diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ y } D \tag{9.56}$$

Éste es el *primer teorema del momento de superficie.*

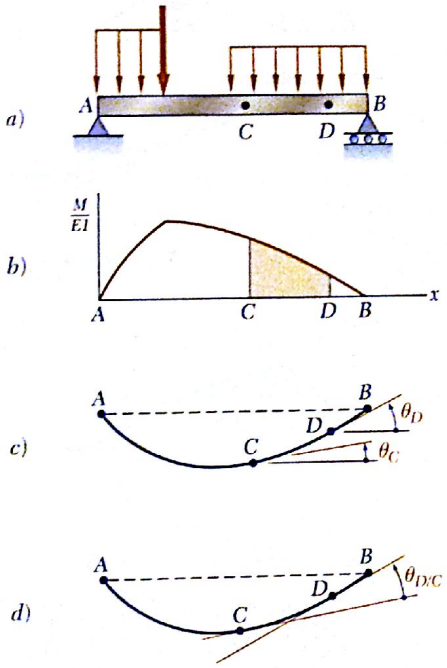


Figura 9.41

---

† Esta relación también puede obtenerse haciendo referencia a los resultados de la sección 9.3, al notar que el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes a la curva elástica en P y P', también es el ángulo que forman las normales correspondientes a dicha curva (figura 9.42). Entonces se tiene que $d\theta = ds/\rho$, en donde ds es la longitud del arco PP' y ρ es el radio de curvatura en P. Sustituyendo para $1/\rho$ de la ecuación (4.21), y observando que, como la pendiente en P es muy pequeña, ds es igual en una primera aproximación a la distancia horizontal dx entre P y P', entonces se tiene

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.54}$$

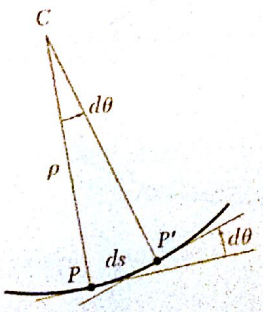


Figura 9.42

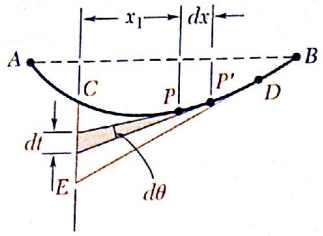


Figura 9.43

Se observa que el ángulo $\theta_{D/C}$ y el área bajo el diagrama (M/EI) tienen el mismo signo. En otras palabras, un área positiva (por ejemplo, un área localizada sobre el eje x) corresponde a una rotación contra las agujas del reloj de la tangente a la curva elástica conforme se pasa de C a D, y un área negativa corresponde a una rotación en el sentido del movimiento del reloj.

Considere dos puntos P y P' localizados entre C y D y a una distancia dx uno de otro (figura 9.43). Las tangentes a la curva elástica dibujadas en P y P' interceptan un segmento de longitud dt sobre la vertical a través del punto C. Dado que la pendiente θ en P y el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes en P y P' son cantidades pequeñas, se puede asumir que dt es igual al arco de círculo de radio x_1 que subtiende el ángulo $d\theta$. Se tiene, entonces

$$dt = x_1\, d\theta$$

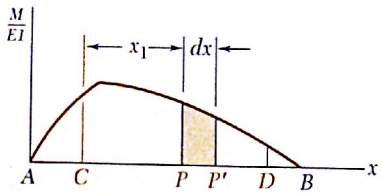


Figura 9.44

o, sustituyendo para $d\theta$ de la ecuación (9.54),

$$dt = x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.57}$$

Ahora, se integra la ecuación (9.57) desde C hasta D. Se observa que, conforme el punto P describe la curva elástica desde C hasta D, la tangente en P recorre la vertical en C, desde C hasta E. La integral del miembro del lado izquierdo, entonces, es igual a la distancia vertical de C a la tangente en D. Esta distancia se denota por $t_{C/D}$ y se llama *desviación tangencial de C con respecto a D*. Así, se tiene

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.58}$$

Se observa que $(M/EI)\, dx$ representa un elemento de área bajo el diagrama (M/EI), y $x_1(M/EI)\, dx$ es el primer momento de ese elemento con respecto al eje vertical que pasa por C (figura 9.44). El miembro del lado derecho de la ecuación (9.58), entonces, representa el primer momento del área localizada bajo el diagrama (M/EI) entre C y D, con respecto a dicho eje.

Por tanto, es posible establecer el *segundo teorema del momento de área* como sigue: *la desviación tangencial $t_{C/D}$ de C con respecto a D es igual al primer momento del área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D con respecto a un eje vertical que pasa por C.*

Si se tiene presente que el primer momento de un área con respecto a un eje es igual al producto del área con la distancia de su centroide a dicho eje, también puede establecerse el segundo teorema del momento de área como sigue:

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\, \bar{x}_1 \tag{9.59}$$

en donde el área se refiere al área bajo el diagrama (M/EI), y donde $\bar{x}_1$ es la distancia del centroide del área al eje vertical que pasa por C (figura 9.45*a*).

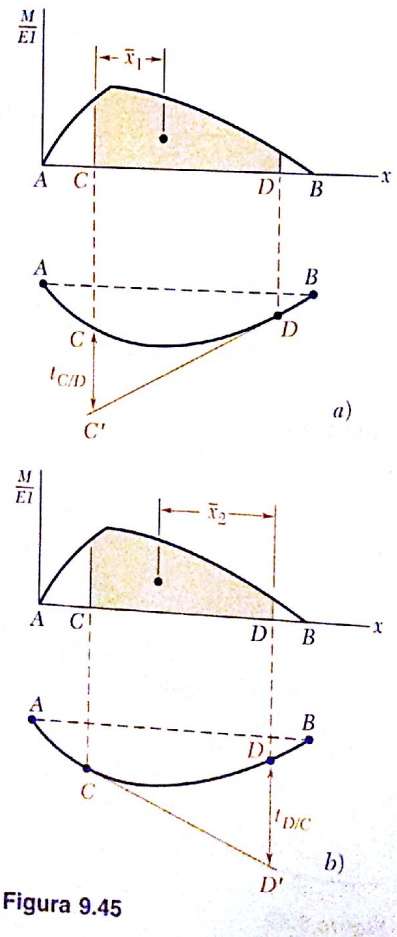


Figura 9.45

Se debe tener cuidado para distinguir entre la desviación tangencial de C con respecto a D, denotada por $t_{C/D}$, y la desviación tangencial de D con respecto a C, la cual se denota por $t_{D/C}$. La desviación tangencial $t_{D/C}$ representa la distancia vertical de D a la tangente a la curva elástica en C, y se obtiene multiplicando el área bajo el diagrama (M/EI) por la distancia $\bar{x}_2$ desde su centroide al eje vertical que pasa por D (figura 9.45*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Se observa que, si el área bajo el diagrama (M/EI) se localiza arriba del eje x, su primer momento con respecto al eje vertical será positivo; si se localiza abajo del eje x, su primer momento será negativo. En la figura 9.45 se observa que un punto con una desviación tangencial *positiva* se localiza *arriba* de la tangente correspondiente, mientras que un punto con una desviación tangencial *negativa* se localizará *debajo* de esa tangente.

*9.10 APLICACIÓN A VIGAS EN VOLADIZO Y VIGAS CON CARGAS SIMÉTRICAS

Se recuerda que el primer teorema de momento de área que se obtuvo en la sección precedente define el ángulo $\theta_{D/C}$ *entre* las tangentes en dos puntos C y D de la curva elástica. Entonces, el ángulo θ_D que la tangente en D forma con la horizontal, es decir, la pendiente en D, puede obtenerse sólo si se conoce la pendiente en C. En forma similar, el segundo teorema de momento de área define la distancia vertical de un punto de la curva elástica desde la tangente en otro punto. La desviación tangencial $t_{D/C}$, entonces, ayudará a localizar el punto D sólo si se conoce la tangente en C. Se concluye que los dos teoremas de momento de área se pueden aplicar eficazmente a la determinación de pendientes y deflexiones sólo si primero se ha determinado una cierta *tangente de referencia* a la curva elástica.

En el caso de una *viga en voladizo* (figura 9.46), se conoce la tangente a la curva elástica en el extremo fijo A y puede usarse como la tangente de referencia. Como $\theta_A = 0$, la pendiente de la viga en cualquier punto D es $\theta_D = \theta_{D/A}$ y puede obtenerse por medio del primer teorema de momento de superficie. Por otro lado, la deflexión y_D del punto D es igual a la desviación tangencial $t_{D/A}$ medida desde la tangente de referencia horizontal en A y puede obtenerse por medio del segundo teorema de momento de área.

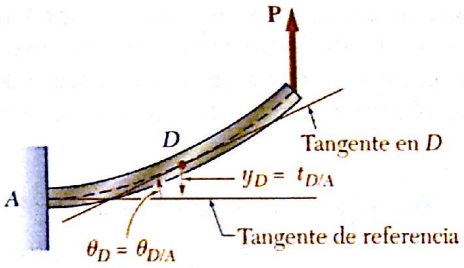


Figura 9.46

En el caso de una viga AB apoyada simplemente con una *carga simétrica* (figura 9.47*a*) o en el caso de una viga simétrica colgante con carga simétrica (véase el problema modelo 9.11), la tangente en el centro C de la viga debe ser horizontal en razón de la simetría y puede usarse como la tangente de referencia (figura 9.47*b*). Como $\theta_C = 0$, la pendiente en el apoyo B es $\theta_B = \theta_{B/C}$ y puede obtenerse por medio del primer teorema de momento de área. También se observa que $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/C}$ y, por tanto, puede obtenerse por medio del segundo teorema de momento de superficie. La pendiente en cualquier otro punto D de la viga (figura 9.47*c*) se encuentra de manera similar, y la deflexión D puede expresarse como $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.

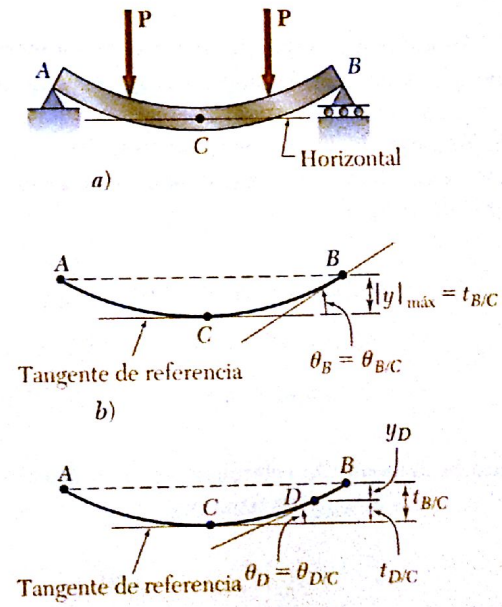


Figura 9.47

EJEMPLO 9.09

Determine la pendiente y deflexión en el extremo B de la viga prismática volada AB cuando está cargada como se indica (figura 9.48), si se sabe que la rigidez de flexión de la viga es $EI = 10\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

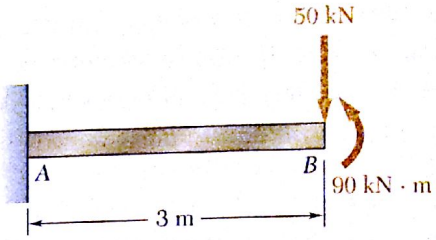
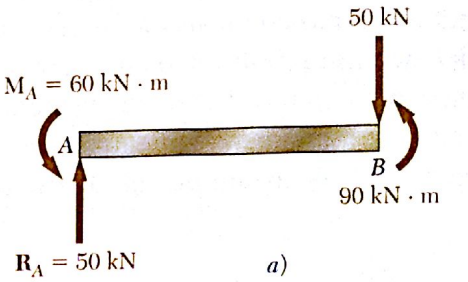


Figura 9.48

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.49*a*). Al sumar las componentes verticales y los momentos respecto a A, se encuentra que la reacción en el extremo fijo A consta de una componente de fuerza vertical $\mathbf{R}_A$ de 50 kN y un par $\mathbf{M}_A$ de 60 kN · m en sentido contrario al de las agujas del reloj. En seguida, se dibuja el diagrama de momento flector (figura 9.49*b*) y se determina, a partir de triángulos semejantes, la distancia x_D del extremo A al punto D de la viga, donde $M = 0$:

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} = \frac{3}{150} \qquad x_D = 1.2\ \text{m}$$



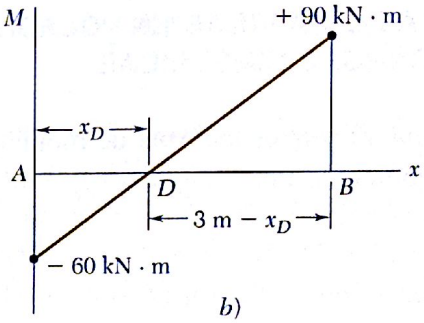


Figura 9.49

Dividiendo la rigidez a flexión EI se obtienen los valores obtenidos para M, se dibuja el diagrama (M/EI) (figura 9.50) y se calculan las áreas que corresponden, respectivamente, a los segmentos AD y DB, asignándose signo positivo al área localizada arriba del eje x, y signo negativo a la ubicada debajo de dicho eje. Usando el primer teorema de momento de área, se tiene

$$\begin{aligned}\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A &= \text{área de } A \text{ a } B = A_1 + A_2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(1.2\ \text{m})(6 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(1.8\ \text{m})(9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}) \\ &= -3.6 \times 10^{-3} + 8.1 \times 10^{-3} \\ &= +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

y, como $\theta_A = 0$,

$$\theta_B = +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

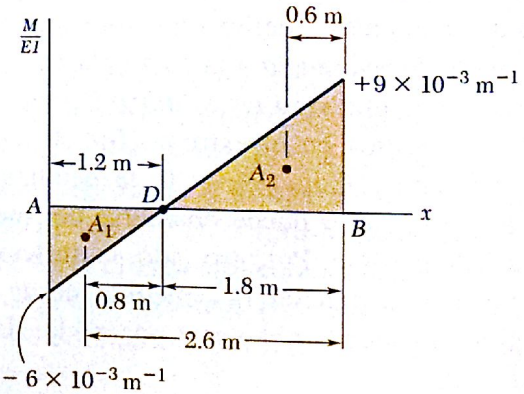


Figura 9.50

Ahora, con el segundo teorema de momento de área, se escribe que la desviación tangencial $t_{B/A}$ es igual al primer momento respecto a un eje vertical que pasa por B del área total entre A y B. Expresando el momento de cada área parcial como el producto de dicha área con la distancia de su centroide al eje que pasa por B, se tiene

$$\begin{aligned}t_{B/A} &= A_1(2.6\ \text{m}) + A_2(0.6\ \text{m}) \\ &= (-3.6 \times 10^{-3})(2.6\ \text{m}) + (8.1 \times 10^{-3})(0.6\ \text{m}) \\ &= -9.36\ \text{mm} + 4.86\ \text{mm} = -4.50\ \text{mm}\end{aligned}$$

Como la tangente de referencia en A es horizontal, la deflexión en B es igual a $t_{B/A}$ y se tiene que

$$y_B = t_{B/A} = -4.50\ \text{mm}$$

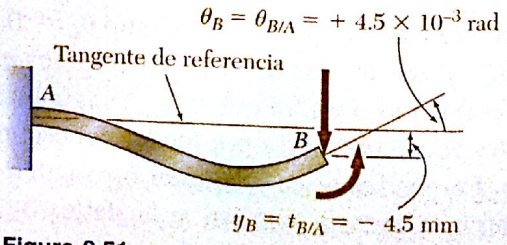


Figura 9.51

En la figura 9.51 se ha bosquejado la viga una vez deflectada.

*9.11 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLECTOR POR PARTES

En muchas aplicaciones, se simplifica la determinación del ángulo $\theta_{D/C}$ y de la desviación tangencial $t_{D/C}$ si el efecto de cada carga se evalúa en forma independiente. Se dibuja un diagrama (M/EI) distinto para cada carga, y se obtiene el ángulo $\theta_{D/C}$ sumando algebraicamente las áreas bajo los distintos diagramas. En forma similar, la desviación tangencial $t_{D/C}$ se obtiene con la suma de los primeros momentos de estas áreas respecto a un eje vertical que pasa por D. De un diagrama (M/EI) dibujado en la forma descrita se dice que fue *dibujado por partes*.

Cuando se dibuja por partes un momento flector diagrama (M/EI), las distintas áreas definidas por éste consisten en formas geométricas simples, tales como rectángulos, triángulos y segmentos parabólicos. Por conveniencia, en la figura 9.52 se indican las áreas y centroides de dichas formas.

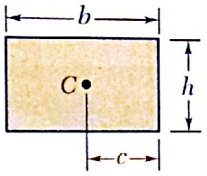
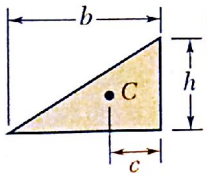
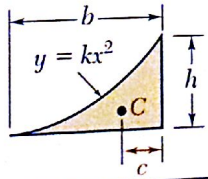
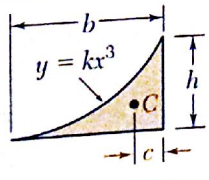
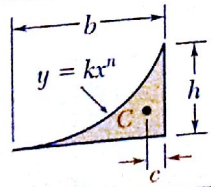
Forma		Área	c
Rectángulo		bh	$\frac{b}{2}$
Triángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
Segmento parabólico		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
Segmento cúbico		$\frac{bh}{4}$	$\frac{b}{5}$
Segmento en general		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$

Figura 9.52 Áreas y centroides de las formas más comunes.

EJEMPLO 9.10

Determine la pendiente y deflexión en el extremo B de la viga prismática del ejemplo 9.09, y dibuje el diagrama de momento flector por partes.

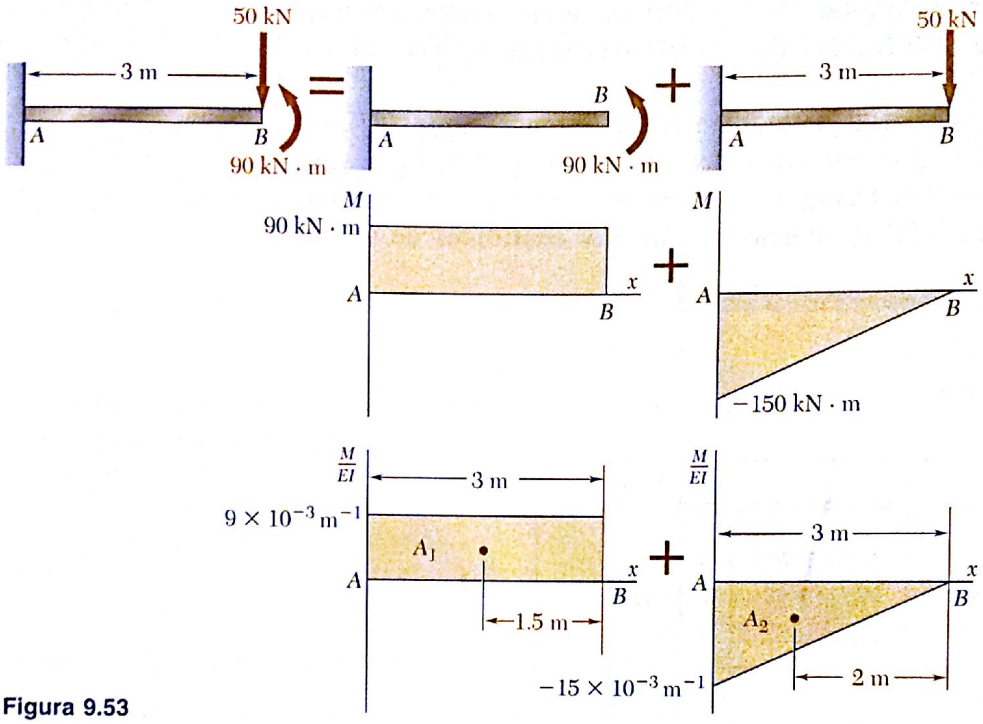


Figura 9.53

Se reemplaza la carga dada por dos cargas equivalentes, como se observa en la figura 9.53, y se dibujan los correspondientes diagramas de momento flector y los diagramas (M/EI) de derecha a izquierda, comenzando en el extremo libre B.

Al aplicar el primer teorema de momento de área, y recordando que $\theta_A = 0$, se tiene

$$\theta_B = \theta_{B/A} = A_1 + A_2$$
$$= (9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m}) - \tfrac{1}{2}(15 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m})$$
$$= 27 \times 10^{-3} - 22.5 \times 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

Al aplicar al segundo teorema de momento de área, se calcula el primer momento de cada área sobre un eje vertical que pase por B y queda

$$y_B = t_{B/A} = A_1(1.5\ \text{m}) + A_2(2\ \text{m})$$
$$= (27 \times 10^{-3})(1.5\ \text{m}) - (22.5 \times 10^{-3})(2\ \text{m})$$
$$= 40.5\ \text{mm} - 45\ \text{mm} = -4.5\ \text{mm}$$

En la práctica es conveniente agrupar en un solo dibujo las dos partes del diagrama (M/EI) (figura 9.54).

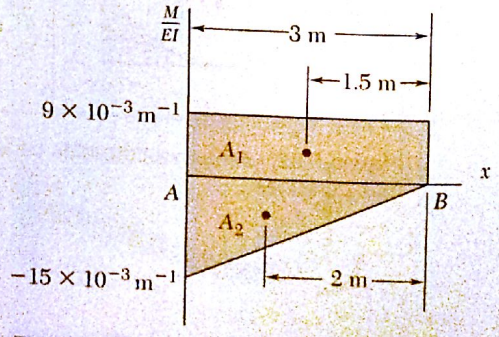


Figura 9.54

EJEMPLO 9.11

Para la viga prismática AB y la carga que se muestra (figura 9.55), determine la pendiente en el apoyo y la deflexión máxima.

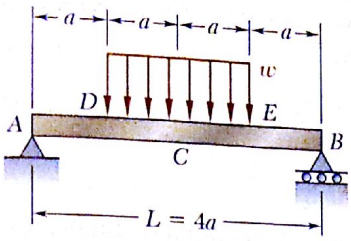


Figura 9.55

Primero se bosqueja la viga deflectada (figura 9.56). Como la tangente en el centro C de la viga es horizontal, se usará como tangente de referencia, y se tiene que $|y|_{\text{máx}} = t_{A/C}$. Por otro lado, como $\theta_C = 0$, se tiene que

$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A \qquad \text{o} \qquad \theta_A = -\theta_{C/A}$$

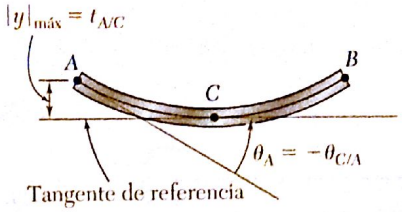


Figura 9.56

Del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.57), se deduce que

$$R_A = R_B = wa$$

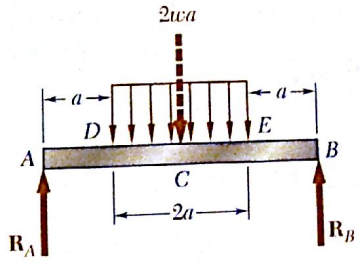


Figura 9.57

A continuación, se dibujan los diagramas de esfuerzo cortante y de momento flector para el tramo AC de la viga. Estos diagramas se dibujan por partes, considerando por separado los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Sin embargo, por conveniencia, las dos partes de cada diagrama se grafican juntas (figura 9.58). Recuerde, de la sección 5.3, que al estar uniformemente distribuida la carga, las partes correspondientes de los diagramas de cortante y momento flector serán lineal y parabólica, respectivamente. Las áreas y centroides del triángulo y del segmento parabólico pueden obtenerse de la figura 9.52, y se encuentra que son, respectivamente,

$$A_1 = \frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2wa^2}{EI}\right) = \frac{2wa^3}{EI}$$

y

$$A_2 = -\frac{1}{3}(a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Al aplicar el primer teorema de momento de área se obtiene

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

Al observar en las figuras 9.55 y 9.56 que $a = \frac{1}{4}L$ y $\theta_A = -\theta_{C/A}$, se tiene que

$$\theta_A = -\frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

Al aplicar el segundo teorema de momento de área resulta,

$$t_{A/C} = A_1\frac{4a}{3} + A_2\frac{7a}{4} = \left(\frac{2wa^3}{EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI}$$

y

$$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2048EI}$$

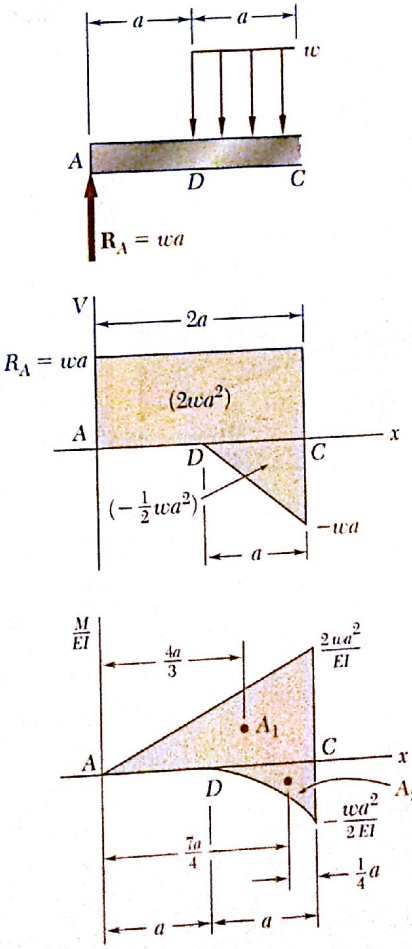
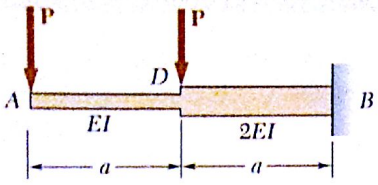
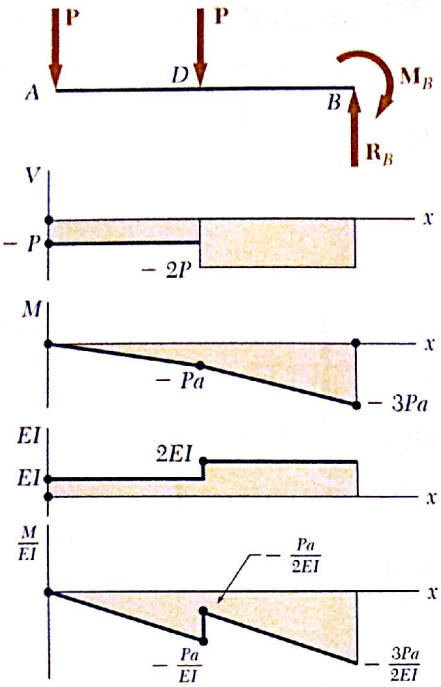


Figura 9.58



PROBLEMA MODELO 9.10

Los travesaños prismáticos *AD* y *DB* se encuentran soldados entre sí para formar la viga volada *ADB*. Si se sabe que la rigidez a flexión es *EI* en el tramo *AD* de la viga, y $2EI$ en el tramo *DB*, determine, para la carga que se muestra en la figura, la pendiente y la deflexión en el extremo *A*.

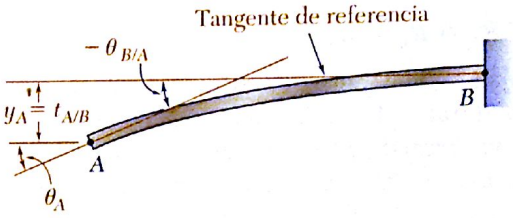


SOLUCIÓN

Diagrama (*M/EI*). Primero se dibuja el diagrama de momento flector para la viga y después se obtiene el diagrama (*M/EI*) dividiendo el valor de *M* en cada punto de la viga entre el valor correspondiente de rigidez a flexión.

Tangente de referencia. Se elige la tangente horizontal en el extremo fijo *B* como la tangente de referencia. Como $\theta_B = 0$ y $y_B = 0$, queda

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$

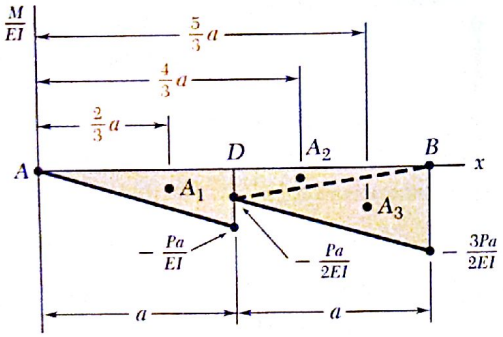


Pendiente en *A*. Al dividir el diagrama (*M/EI*) en las tres partes que se muestran, se tiene

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$



Al usar el primer teorema de momento de área, queda

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

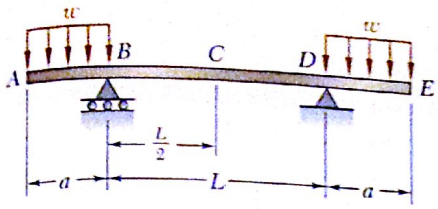
$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI}\measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexión en *A*. Con el segundo teorema de momento de área, se tiene

$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right)$$

$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 9.11

Para la viga prismática y la carga que se muestra en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo E.

SOLUCIÓN

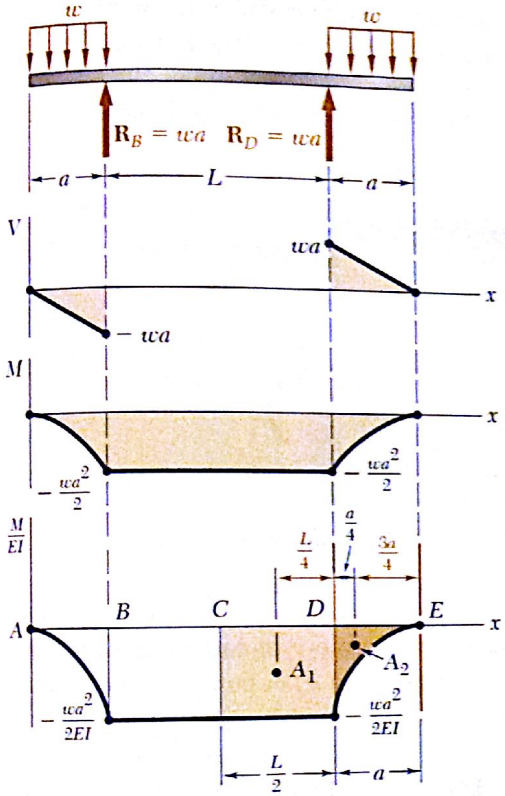


Diagrama (M/EI). Del diagrama de cuerpo libre de la viga, se determinan las reacciones y después se dibujan los diagramas de momento cortante y flector. Como la rigidez a flexión de la viga es constante, se divide cada valor de M entre EI y se obtiene el diagrama (M/EI) que se muestra.

Tangente de referencia. Como la viga y su carga son simétricas respecto al punto medio C, la tangente en C es horizontal y se utiliza como tangente de referencia. Al mirar el boceto se observa que como $\theta_C = 0$,

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C} \tag{1}$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \tag{2}$$

Pendiente en E. Con referencia al diagrama (M/EI) y usando el primer teorema de momento de área, se tiene que

$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

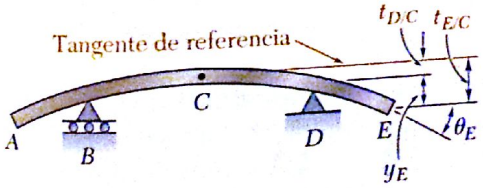
$$A_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Con la ecuación (1) queda

$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_1 + A_2 = -\frac{wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a) \qquad \theta_E = \frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a)\curvearrowleft \blacktriangleleft$$

Deflexión en E. Al emplear el segundo teorema de momento de área, se tiene que



$$t_{D/C} = A_1\frac{L}{4} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{L}{4} = -\frac{wa^2L^2}{16EI}$$

$$t_{E/C} = A_1\left(a + \frac{L}{4}\right) + A_2\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\left(a + \frac{L}{4}\right) + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

Al usar la ecuación (2), queda

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI}(2L + a) \qquad y_E = \frac{wa^3}{8EI}(2L + a)\downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilice el método de momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.95 a *9.98* Para la viga en voladizo uniforme y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo libre, *b*) la deflexión en el extremo libre.

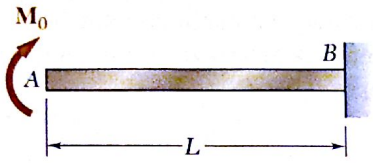


Figura P9.95

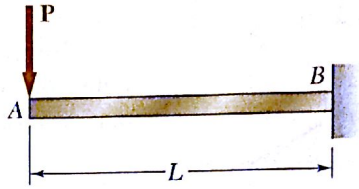


Figura P9.96

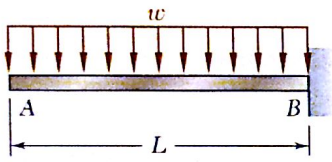


Figura P9.97

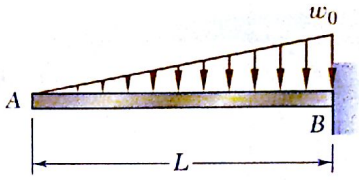


Figura *P9.98*

***9.99* y 9.100** Para la viga en voladizo uniforme y la carga que se muestran en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en *a*) el punto *B*, *b*) el punto *C*.

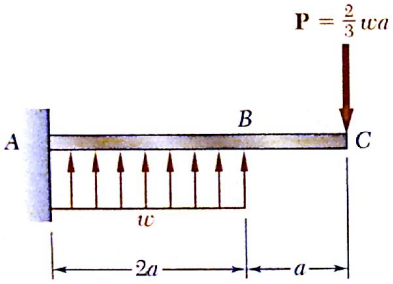


Figura *P9.99*

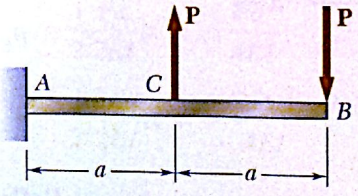


Figura P9.100

9.101 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

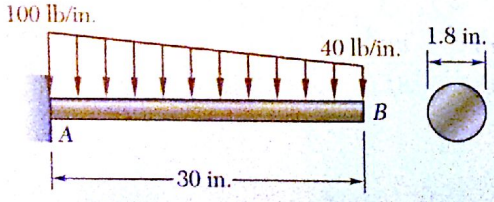


Figura P9.101

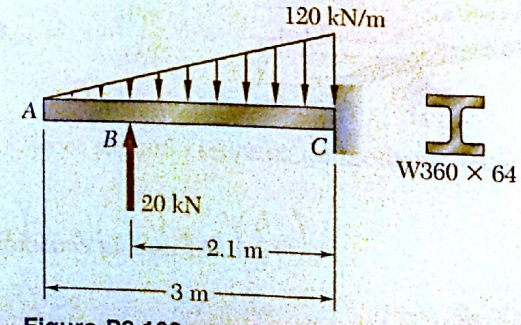


Figura P9.102

9.102 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.103 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

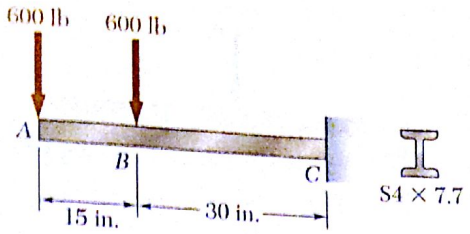


Figura P9.103

9.104 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

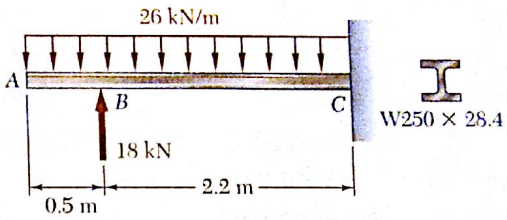


Figura P9.104

9.105 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión y la pendiente en el extremo *A* ocasionadas por el momento $\mathbf{M}_0$.

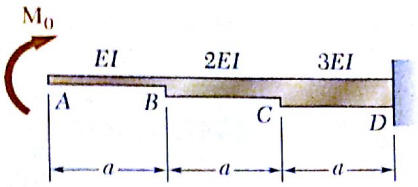


Figura *P9.105*

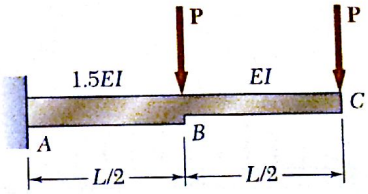


Figura P9.106

9.106 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

9.107 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*.

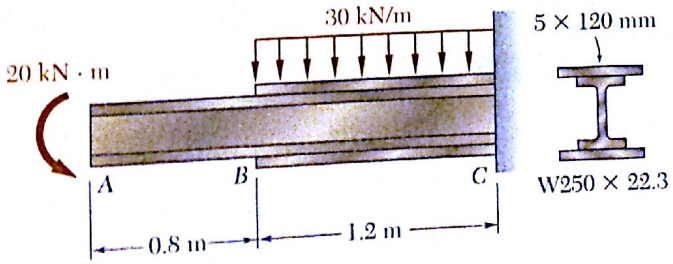


Figura P9.107

9.108 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la pendiente y la deflexión en el extremo *C*.

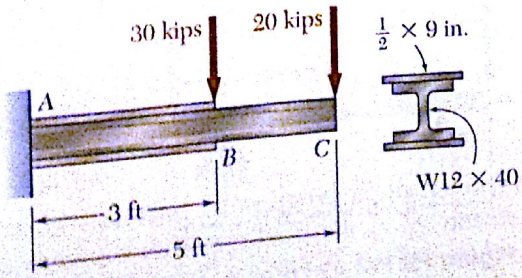


Figura P9.108

9.109 a 9.114 Para la viga prismática y la carga que se muestra en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

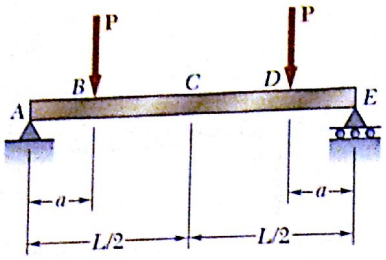


Figura P9.109

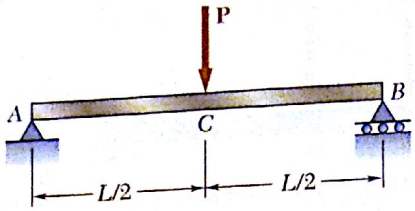


Figura P9.110

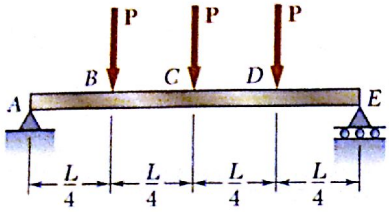


Figura P9.111

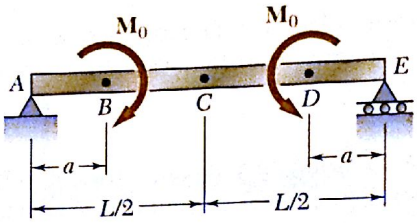


Figura P9.112

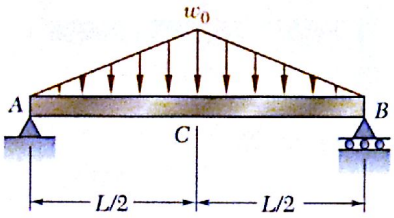


Figura *P9.113*

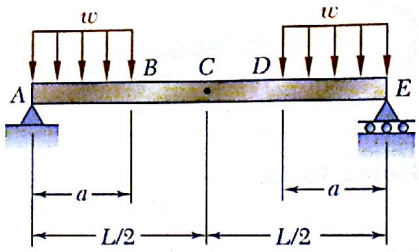


Figura P9.114

9.115 y *9.116* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

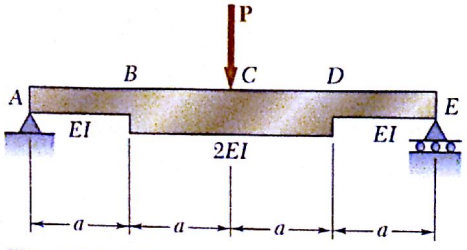


Figura P9.115

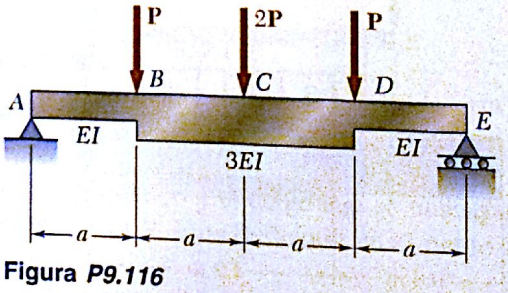


Figura *P9.116*

9.117 Si se sabe que la magnitud de la carga **P** es de 7 kips, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

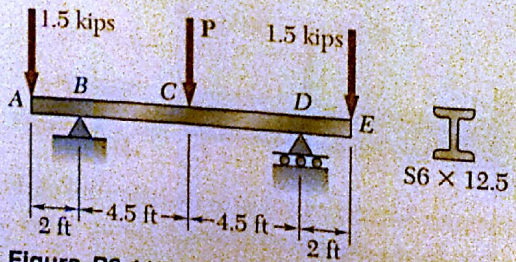


Figura *P9.117*

9.118 y 9.119 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio de la viga. Use $E = 200$ GPa.

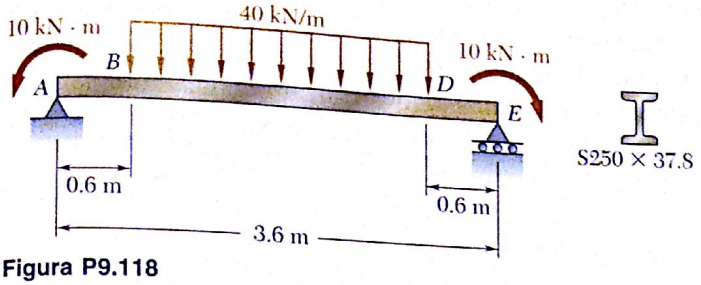


Figura P9.118

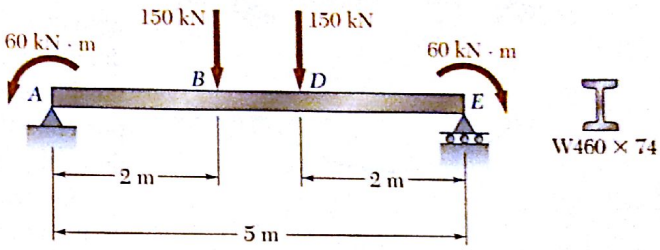


Figura P9.119

9.120 Para la viga y la carga del problema 9.117, determine *a*) el valor de **P** para el cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga, *b*) la deflexión correspondiente en el extremo *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.121 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, y si se sabe que $w = 8$ kN/m, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

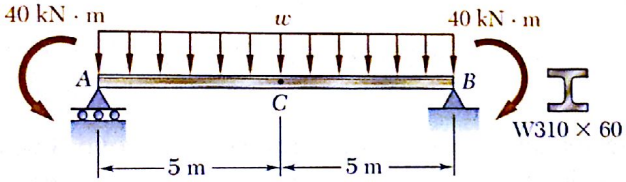


Figura P9.121 y P9.122

9.122 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine el valor de w para el cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

***9.123** Una varilla uniforme *AE* se apoya en los puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* para la cual la pendiente en los extremos *A* y *E* es igual a cero.

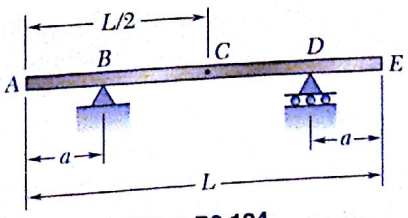


Figura P9.123 y P9.124

***9.124** Una varilla uniforme *AE* se apoya en los puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* desde los extremos de la varilla hasta los puntos de apoyo, si las deflexiones hacia abajo en los puntos *A*, *C* y *E* deben ser iguales.

*9.12 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA A VIGAS CON CARGAS ASIMÉTRICAS

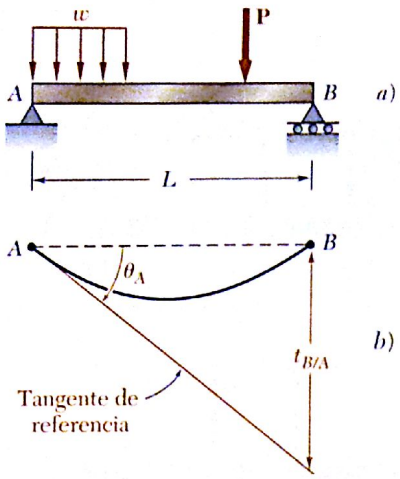


Figura 9.59

En la sección 9.10 se vio que, cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga simétrica, la tangente al centro C de la viga es horizontal y puede usarse como tangente de referencia. Cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga asimétrica, en general no es posible determinar por inspección el punto de la viga donde la tangente es horizontal. Se deben emplear otros medios para localizar una tangente de referencia, por ejemplo, una tangente de pendiente conocida para usarse en la aplicación de cualquiera de los dos teoremas de momento de área.

Generalmente conviene más seleccionar la tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga. Por ejemplo, si se considera la tangente en el apoyo A de la viga AB apoyada simplemente (figura 9.59*a*) se determina su pendiente con el cálculo de la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto de A, y dividiendo $t_{B/A}$ entre la distancia L entre los apoyos. Si se recuerda que la desviación tangencial de un punto localizado arriba de la tangente es positiva, queda

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \tag{9.61}$$

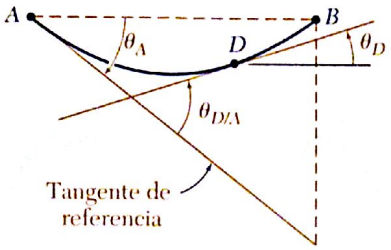


Figura 9.60

Una vez que se ha encontrado la pendiente de la tangente de referencia, es posible determinar la pendiente θ_D de la viga en el punto D (figura 9.60) con el uso del primer teorema de momento de área para obtener $\theta_{D/A}$, y entonces se tiene

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} \tag{9.62}$$

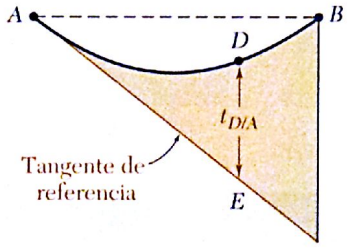


Figura 9.61

La desviación tangencial $t_{D/A}$ de D respecto al apoyo A se obtiene del segundo teorema de momento de área. Se observa que $t_{D/A}$ es igual al segmento ED (figura 9.61) y representa la distancia vertical de D *a la tangente de referencia*. Por otro lado, la deflexión y_D del punto D representa la distancia vertical de D *a la línea horizontal* AB (figura 9.62). Como y_D es igual en

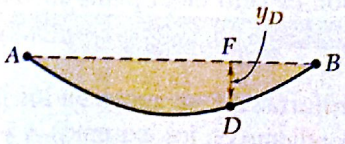


Figura 9.62

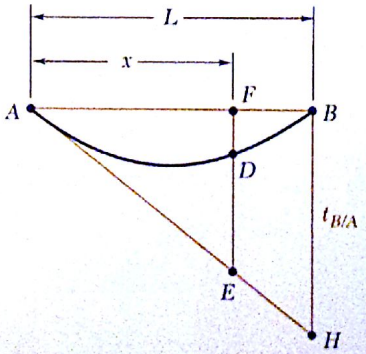


Figura 9.63

magnitud al segmento FD, puede expresarse como la diferencia entre EF y ED (figura 9.63). Al analizar los triángulos semejantes AFE y ABH se ve que

$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \quad \text{o} \quad EF = \frac{x}{L}t_{B/A}$$

y al recordar las convenciones de signos para las deflexiones y desviaciones tangenciales, queda

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L}t_{B/A} \tag{9.63}$$

EJEMPLO 9.12

Para la viga prismática y la carga que se indica (figura 9.64) determine la pendiente y deflexión en el punto D.

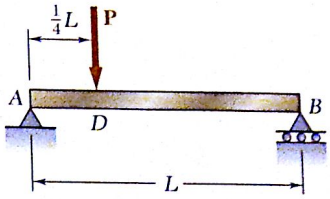


Figura 9.64

Tangente de referencia en el apoyo A. Se calculan las reacciones en los apoyos y se dibuja el diagrama (M/EI) (figura 9.65). Se determina la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto al apoyo A, aplicando el segundo teorema de momento de área y calculando los momentos de las áreas A_1 y A_2 arriba de un eje vertical que pasa por B. Queda

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{3PL^2}{128EI} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\frac{3L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = A_1\left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4}\right) + A_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{3PL^2}{128EI}\frac{10L}{12} + \frac{9PL^2}{128EI}\frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

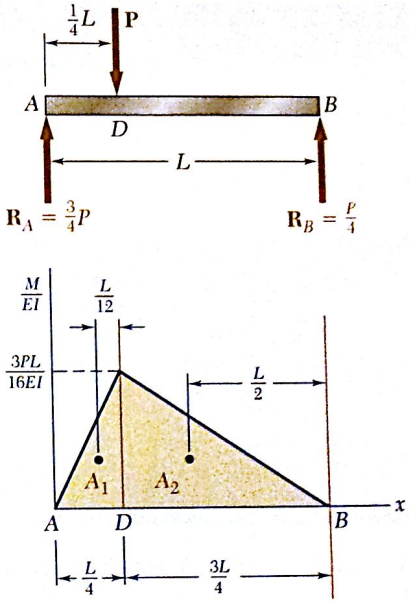


Figura 9.65

La pendiente de la tangente de referencia en A es (figura 9.66)

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\frac{7PL^2}{128EI}$$

Pendiente en D. Al aplicar el primer teorema de momento de área de A a D, queda

$$\theta_{D/A} = A_1 = \frac{3PL^2}{128EI}$$

Entonces, la pendiente en D es

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Deflexión en D. Primero se determina la desviación tangencial $DE = t_{D/A}$ con el cálculo del momento del área A_1 sobre un eje vertical que pasa por D:

$$DE = t_{D/A} = A_1\left(\frac{L}{12}\right) = \frac{3PL^2}{128EI}\frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

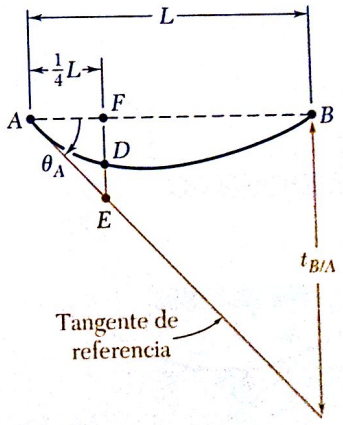


Figura 9.66

La deflexión en D es igual a la diferencia entre los segmentos DE y EF (figura 9.66). Queda

$$y_D = DE - EF = t_{D/A} - \tfrac{1}{4}t_{B/A}$$

$$= \frac{PL^3}{512EI} - \frac{1}{4}\frac{7PL^3}{128EI}$$

$$y_D = -\frac{3PL^3}{256EI} = -0.01172PL^3/EI$$

*9.13 DEFLEXIÓN MÁXIMA

Cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga asimétrica, la deflexión máxima, por lo general, no ocurre en el centro de la viga. Éste es el caso de las vigas que forman el marco de la plataforma horizontal del tráiler que se aprecia en la figura 9.67, la cual se utiliza para transportar un trascavo con ruedas.

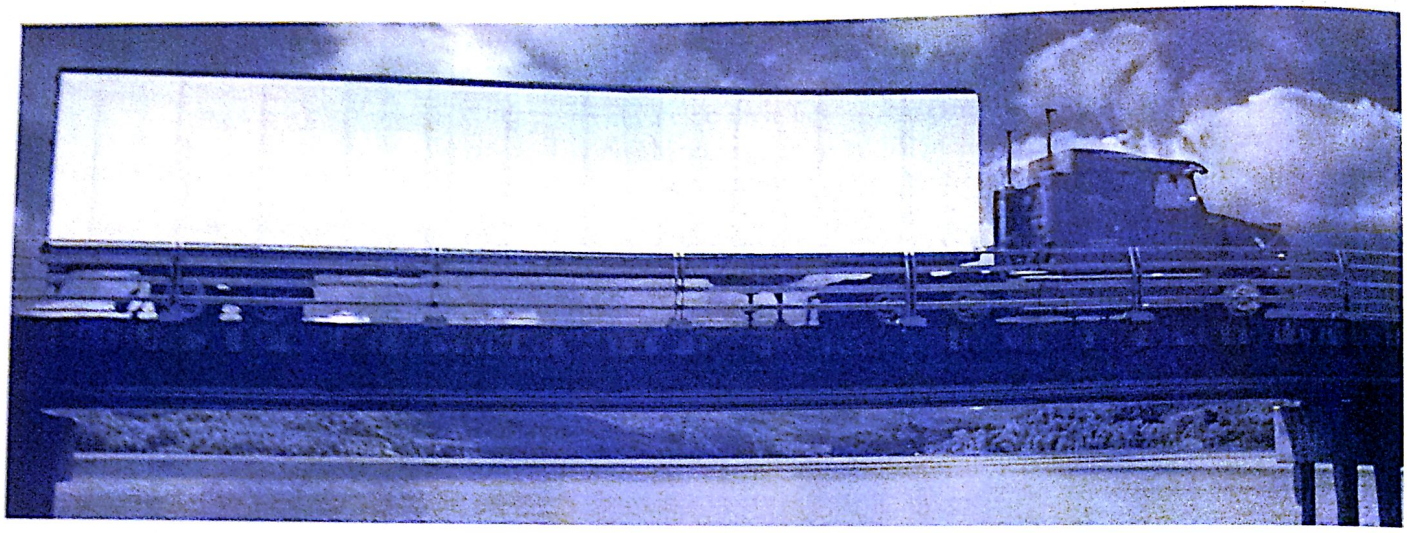


Figura 9.67 Las deflexiones de las vigas que se usan en el puente deben analizarse para las diferentes posiciones posibles de la carga.

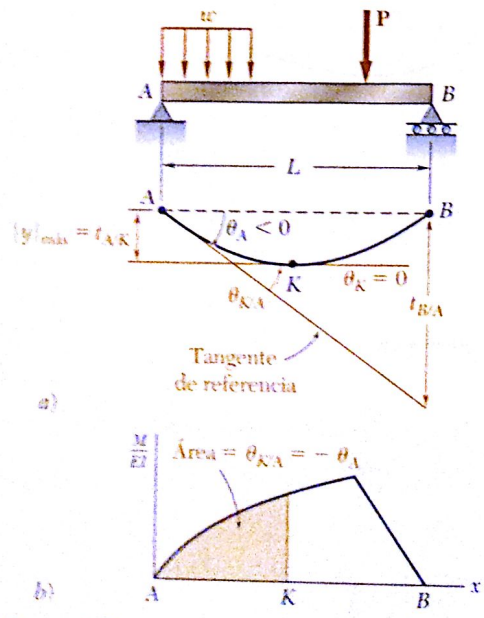


Figura 9.68

Para determinar la máxima deflexión de una viga como la descrita, se debe localizar el punto K de ella en el que la tangente es horizontal, y calcular la deflexión en dicho punto.

El análisis debe comenzar con la determinación de una tangente de referencia en uno de los apoyos. Si se selecciona el apoyo A, la pendiente θ_A se obtiene con el método utilizado en la sección precedente, es decir, con el cálculo de la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto a A y dividiendo dicha cantidad entre la distancia L entre los dos apoyos.

Como la pendiente θ_K en el punto K es cero (figura 9.68*a*), debe cumplirse que

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

Si se recuerda el primer teorema de momento de área, se concluye que el punto K puede determinarse con la medición bajo el diagrama (M/EI) de un área igual a $\theta_{K/A} = -\theta_A$ (figura 9.68*b*).

Con la observación de que la deflexión máxima $|y|_{máx}$ es igual a la desviación tangencial $t_{A/K}$ del apoyo A con respecto a K (figura 9.68*a*), se obtiene $|y|_{máx}$ con el cálculo del primer momento del área A entre A y K respecto al eje vertical que pasa por A (figura 9.68*b*).

EJEMPLO 9.13

Determine la deflexión máxima de la viga del ejemplo 9.12.

Determinación del punto K en donde la pendiente vale cero. Recuerde del ejemplo 9.12, que la pendiente en el punto D, en donde se aplica la carga, es negativa. Se deduce que el punto K, donde la pendiente vale cero, se localiza entre D y el apoyo B (figura 9.69). Los cálculos, por tanto, se simplifican si se relaciona la pendiente en K con la pendiente en B, en vez de la pendiente en A.

Como en el ejemplo 9.12 ya se determinó la pendiente en A, la pendiente en B se obtiene con

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = \theta_A + A_1 + A_2$$

$$\theta_B = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} + \frac{9PL^2}{128EI} = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Al observar que el momento flector a una distancia u del extremo B es $M = \frac{1}{4}Pu$ (figura 9.70*a*), se expresa el área A' ubicada entre K y B bajo el diagrama (M/EI) (figura 9.70*b*) como

$$A' = \frac{1}{2}\frac{Pu}{4EI}u = \frac{Pu^2}{8EI}$$

Del primer teorema del momento de área se tiene

$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K = A'$$

y como $\theta_K = 0$, $\qquad \theta_B = A'$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para θ_B y A', queda

$$\frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Pu^2}{8EI}$$

y, al resolver para u, queda

$$u = \frac{\sqrt{5}}{4}L = 0.559L$$

Por tanto, la distancia del apoyo A al punto K es

$$AK = L - 0.559L = 0.441L$$

Deflexión máxima. La deflexión máxima $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/K}$ y, por tanto, al primer momento del área A' sobre un eje vertical que pasa por B (figura 9.70*b*). Se tiene

$$|y|_{\text{máx}} = t_{B/K} = A'\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^2}{8EI}\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^3}{12EI}$$

Al sustituir el valor obtenido para u, queda

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{P}{12EI}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^3 = 0.01456PL^3/EI$$

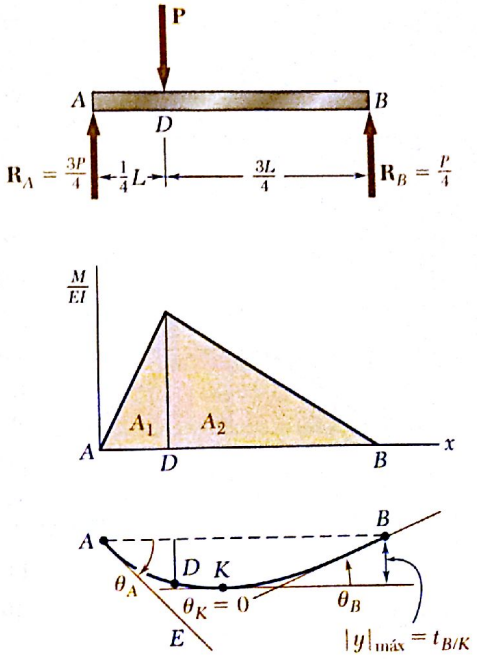


Figura 9.69

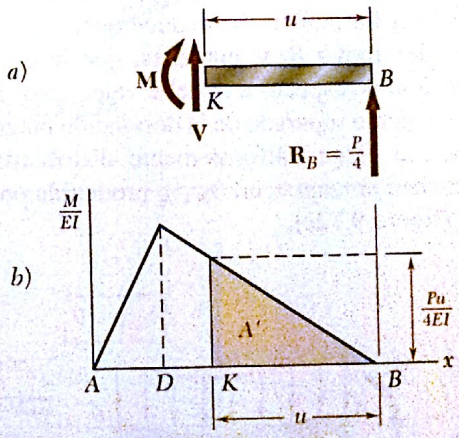


Figura 9.70

*9.14 USO DE LOS TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA CON VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada se pueden determinar por medio del método de momento de área en una forma muy parecida a la que se describió en la sección 9.8. Por ejemplo, en el caso de una viga indeterminada al primer grado, se designa como redundante a una de las reacciones y se elimina o modifica de acuerdo con el apoyo correspondiente. Luego, a la reacción redundante se le trata como una carga desconocida que, junto con las demás cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La condición de compatibilidad se expresa casi siempre escribiendo que la desviación tangencial de un apoyo respecto a otro es cero, o bien, que tiene un valor predeterminado.

Se dibujan dos diagramas de cuerpo libre distintos. Uno muestra *las cargas dadas y las reacciones correspondientes* en los apoyos que no hayan sido eliminados; el otro muestra *la reacción redundante y las reacciones correspondientes* en los mismos apoyos (véase el ejemplo 9.14). Después se dibuja un diagrama *M/EI* para cada una de las dos cargas, y las desviaciones tangenciales buscadas se obtienen con el segundo teorema de momento de área. Al superponer los resultados obtenidos, se expresa la condición requerida de compatibilidad y se determina la reacción redundante. Las otras reacciones se obtienen del diagrama de cuerpo libre de la viga.

Una vez determinadas las reacciones en los apoyos, es posible obtener la pendiente y deflexión por medio del método de momento de área en cualquier otro punto de la viga.

EJEMPLO 9.14

Determine la reacción en los apoyos para la viga prismática y carga que se muestra (figura 9.71).

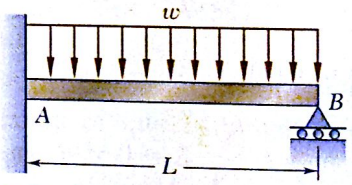


Figura 9.71

Se considera redundante al par que se ejerce en el extremo fijo A y se reemplaza al extremo fijo por un apoyo puntual. Ahora se considera al par $\mathbf{M}_A$ como una carga desconocida (figura 9.72*a*) y se determinará a partir de la condición de que la tangente a la viga en A debe ser horizontal. Se deduce que esta tangente debe pasar a través del apoyo B, y, entonces, que la desviación tangencial $t_{B/A}$ de B con respecto a A debe valer cero. Se llega a la solución con el cálculo separado de la desviación tangencial $(t_{B/A})_w$ ocasionada por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.72*b*) y la desviación tangencial $(t_{B/A})_M$ producida por el par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.72*c*).

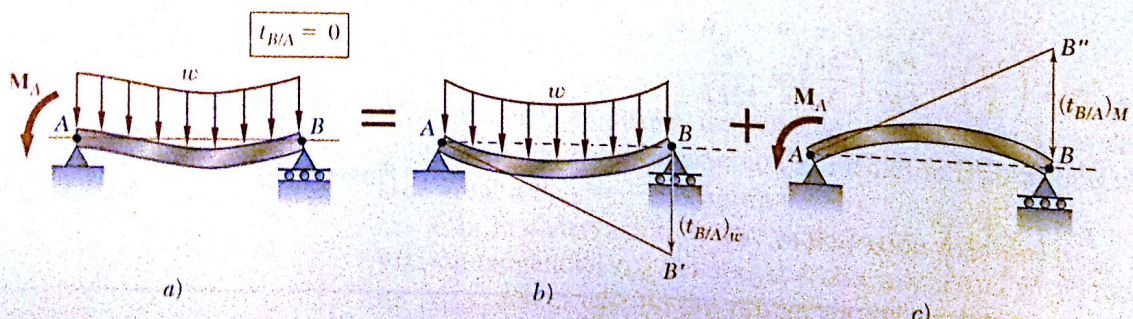


Figura 9.72

Al considerar primero el diagrama de cuerpo libre de la viga bajo la carga distribuida conocida w (figura 9.73*a*), se determinan las reacciones correspondientes en los apoyos A y B. Queda

$$(\mathbf{R}_A)_1 = (\mathbf{R}_B)_1 = \tfrac{1}{2}wL\uparrow \tag{9.64}$$

Ahora se dibujan los diagramas correspondientes de momento cortante y (M/EI) (figuras 9.73*b* y *c*). Al observar que M/EI queda representado por un arco de parábola, y recordando la fórmula $A = \frac{2}{3}bh$, para el área bajo dicha curva, se calcula el primer momento de esta área sobre un eje vertical que pasa por B, y queda

$$(t_{B/A})_w = A_1\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}L\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24EI} \tag{9.65}$$

A continuación, se considera el diagrama de cuerpo libre de la viga cuando está sujeta al par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.74*a*) y se determinan las reacciones correspondientes en A y en B:

$$(\mathbf{R}_A)_2 = \frac{M_A}{L}\uparrow \qquad (\mathbf{R}_B)_2 = \frac{M_A}{L}\downarrow \tag{9.66}$$

Al dibujar el diagrama (M/EI) correspondiente (figura 9.74*b*), se aplica otra vez el segundo teorema de momento de área y queda

$$(t_{B/A})_M = A_2\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}L\frac{M_A}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{M_AL^2}{3EI} \tag{9.67}$$

Se combinan los resultados obtenidos en las ecuaciones (9.65) y (9.67), y se expresa que la desviación tangencial resultante $t_{B/A}$ debe valer cero (figura 9.72), queda

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$
$$\frac{wL^4}{24EI} - \frac{M_AL^2}{3EI} = 0$$

y, al resolver para M_A, se tiene

$$M_A = +\tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

Al sustituir M_A en la ecuación (9.66) y tener presente la ecuación (9.64), se obtienen los valores de R_A y R_B:

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \tfrac{1}{2}wL + \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$
$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \tfrac{1}{2}wL - \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{3}{8}wL$$

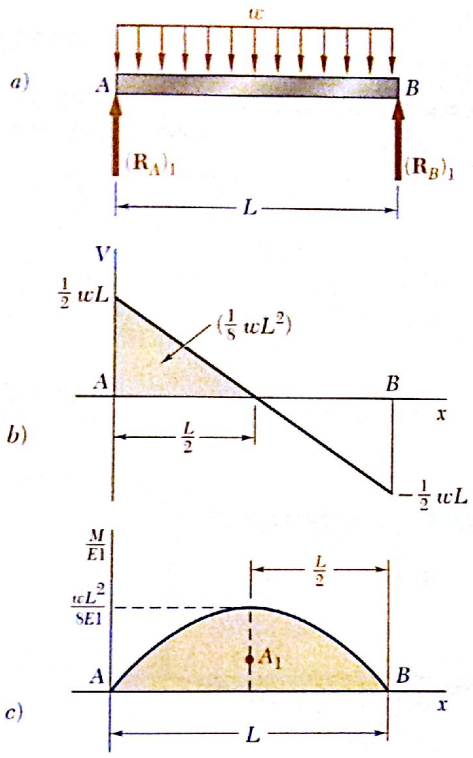


Figura 9.73

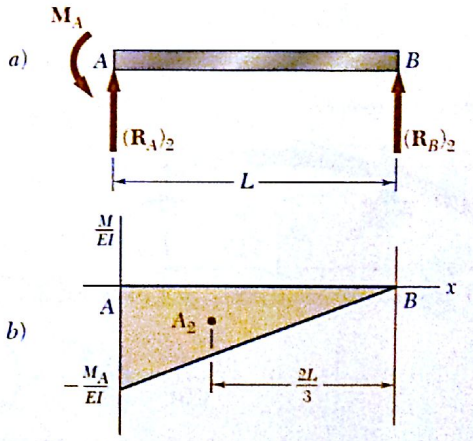
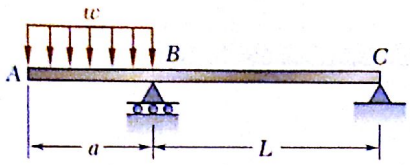


Figura 9.74

En el ejemplo recién considerado, sólo había una reacción redundante, es decir, la viga era *estáticamente indeterminada al primer grado*. Los *teoremas de momento de área* también pueden usarse cuando hay reacciones redundantes adicionales. Como se analizó en la sección 9.5, en ese caso es necesario escribir ecuaciones adicionales. Por tanto, para una viga que sea *estáticamente indeterminada al segundo grado*, será necesario seleccionar dos redundantes y escribir dos ecuaciones que consideren las *deformaciones* de la estructura en cuestión.



PROBLEMA MODELO 9.12

Para la viga y carga mostradas en la figura, *a*) determine la deflexión en el extremo *A*, *b*) evalúe y_A para los siguientes datos:

$W10 \times 33$: $I = 170$ in.^{4} $\qquad E = 29 \times 10^6$ psi

$a = 3$ ft $= 36$ in. $\qquad L = 5.5$ ft $= 66$ in.

$w = 13.5$ kips/ft $= 1\,125$ lb/in.

SOLUCIÓN

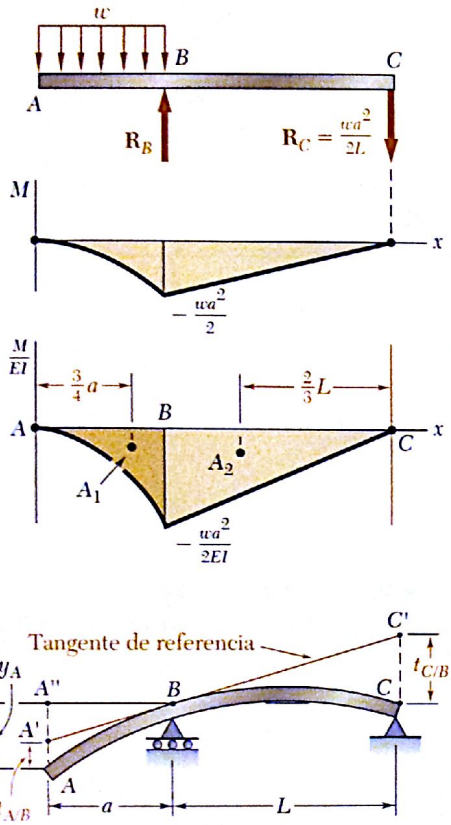


Diagrama (*M/EI*). Primero se dibuja el diagrama de momento flector. Como la rigidez de flexión *EI* es constante, se obtiene el diagrama (*M/EI*) que se muestra, el cual consiste en un segmento parabólico de área A_1 y un triángulo de área A_2.

$$A_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)a = -\frac{wa^3}{6EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)L = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

Tangente de referencia en *B*. La tangente de referencia se dibuja en el punto *B* como se indica. La desviación tangencial de *C* respecto a *B* se determina con el uso del segundo teorema de momento de área:

$$t_{C/B} = A_2\frac{2L}{3} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{2L}{3} = -\frac{wa^2L^2}{6EI}$$

Para los triángulos semejantes $A''A'B$ y $CC'B$ se encuentra que

$$A''A' = t_{C/B}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^2L^2}{6EI}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^3L}{6EI}$$

Usando otra vez el segundo teorema de momento de área queda

$$t_{A/B} = A_1\frac{3a}{4} = \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{3a}{4} = -\frac{wa^4}{8EI}$$

a*) Deflexión en el extremo *A

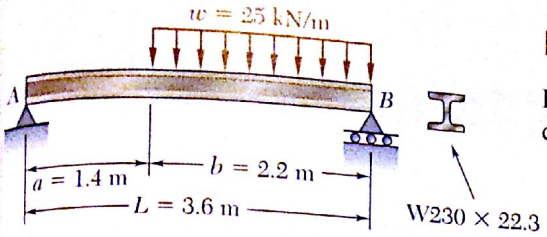
$$y_A = A''A' + t_{A/B} = -\frac{wa^3L}{6EI} - \frac{wa^4}{8EI} = -\frac{wa^4}{8EI}\left(\frac{4}{3}\frac{L}{a} + 1\right)$$

$$y_A = \frac{wa^4}{8EI}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{L}{a}\right)\downarrow \blacktriangleleft$$

***b*) Evaluación de y_A.** Al sustituir los datos proporcionados, se tiene

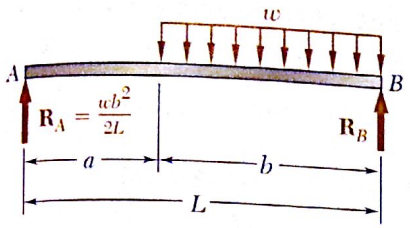
$$y_A = \frac{(1\,125 \text{ lb/in.})(36 \text{ in.})^4}{8(29 \times 10^6 \text{ lb/in.}^2)(170 \text{ in.}^4)}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{66 \text{ in.}}{36 \text{ in.}}\right)$$

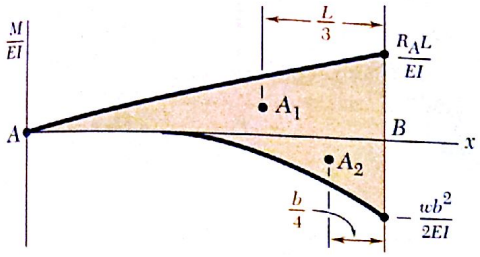
$$y_A = 0.1650 \text{ in.}\downarrow \blacktriangleleft$$

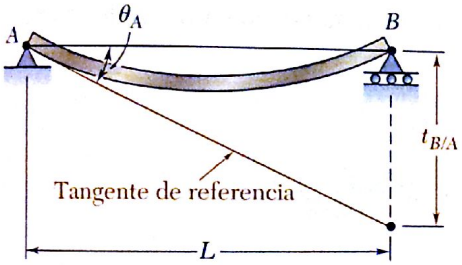


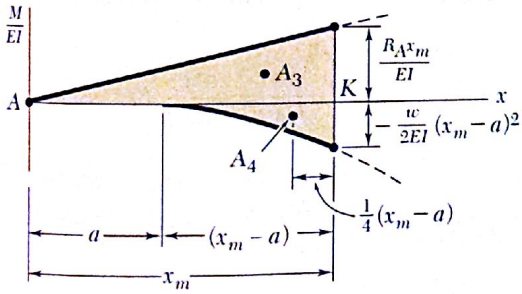
PROBLEMA MODELO 9.13

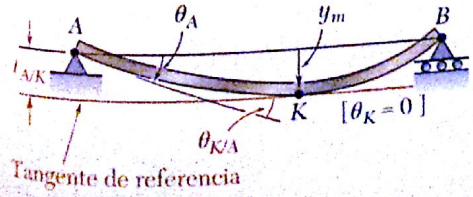
Para la viga y carga que se representan en la figura, determine la magnitud y ubicación de la deflexión más grande. Considere $E = 200$ GPa.











SOLUCIÓN

Reacciones. Con el uso de un diagrama de cuerpo libre de la viga completa se encuentra que

$$\mathbf{R}_A = 16.81 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_B = 38.2 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama (*M/EI*). Se dibuja por partes el diagrama (*M/EI*), considerando en forma separada los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Las áreas del triángulo y del segmento son

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{R_AL}{EI}L = \frac{R_AL^2}{2EI} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wb^2}{2EI}\right)b = -\frac{wb^3}{6EI}$$

Tangente de referencia. Se elige como tangente de referencia a la tangente a la viga. Con el uso del segundo teorema de momento de área se determina la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B respecto al apoyo A:

$$t_{B/A} = A_1\frac{L}{3} + A_2\frac{b}{4} = \left(\frac{R_AL^2}{2EI}\right)\frac{L}{3} + \left(-\frac{wb^3}{6EI}\right)\frac{b}{4} = \frac{R_AL^3}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI}$$

Pendiente en *A*

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\left(\frac{R_AL^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) \tag{1}$$

Deflexión más grande. La deflexión mayor ocurre en el punto K, donde la pendiente de la viga vale cero. Entonces queda

$$\theta_K = \theta_A + \theta_{K/A} = 0 \tag{2}$$

pero

$$\theta_{K/A} = A_3 + A_4 = \frac{R_Ax_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3 \tag{3}$$

Se sustituyen en la ecuación (2) los valores de θ_A y $\theta_{K/A}$ obtenidos con las ecs. (1) y (3):

$$-\left(\frac{R_AL^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) + \left[\frac{R_Ax_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3\right] = 0$$

Al sustituir los datos numéricos, se obtiene

$$-29.53\frac{10^3}{EI} + 8.405x_m^2\frac{10^3}{EI} - 4.167(x_m - 1.4)^3\frac{10^3}{EI} = 0$$

Se resuelve por ensayo y error para x_m y se encuentra que $x_m = 1.890$ m ◀

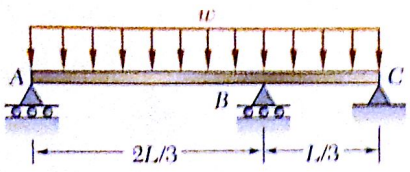
Al calcular los momentos de A_3 y A_4 sobre un eje vertical que pasa por A, se tiene

$$|y|_m = t_{A/K} = A_3\frac{2x_m}{3} + A_4\left[a + \frac{3}{4}(x_m - a)\right]$$

$$= \frac{R_Ax_m^3}{3EI} - \frac{wa}{6EI}(x_m - a)^3 - \frac{w}{8EI}(x_m - a)^4$$

Con el uso de los datos dados, $R_A = 16.81$ kN, e $I = 28.9 \times 10^{-6}$ m^4, se encuentra

$$y_m = 6.39 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

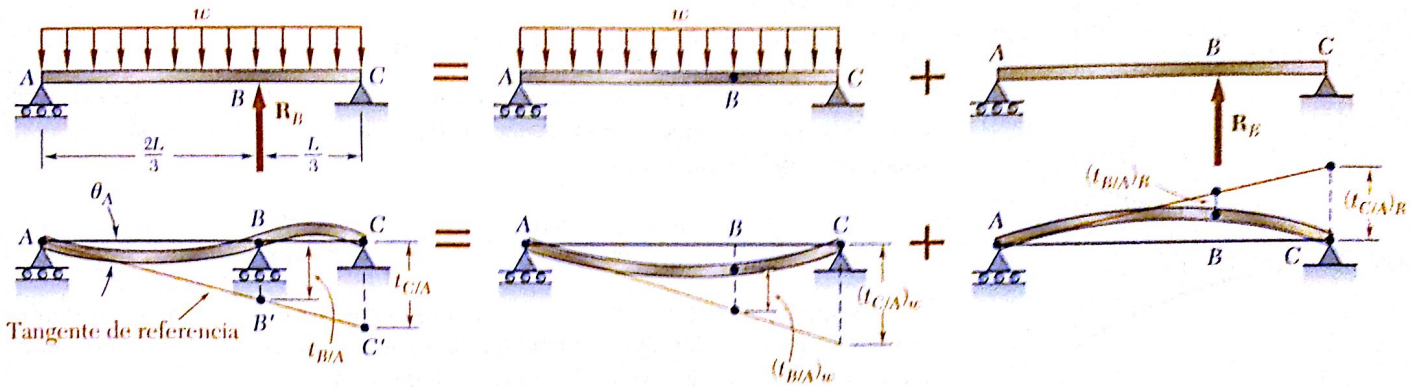


PROBLEMA MODELO 9.14

Para la viga y carga uniformes que se muestran en la figura, determine la reacción en B.

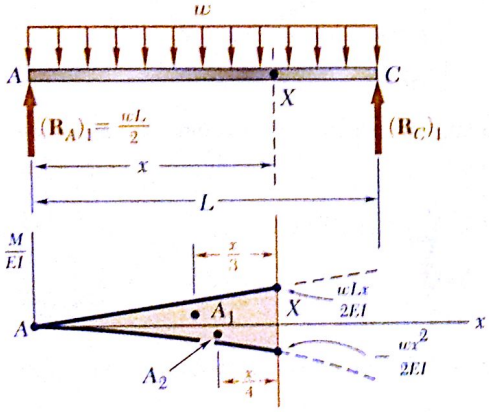
SOLUCIÓN

La viga es indeterminada al tercer grado. Se elige a $\mathbf{R}_B$ como redundante y se consideran separadamente la carga distribuida y la carga de reacción redundante. A continuación se selecciona como tangente de referencia a la tangente en A. De los triángulos semejantes ABB' y ACC' se obtiene



$$\frac{t_{C/A}}{L} = \frac{t_{B/A}}{\frac{2}{3}L} \qquad t_{C/A} = \frac{3}{2}t_{B/A} \tag{1}$$

Para cada carga se dibuja el diagrama (M/EI) y después se determinan las desviaciones tangenciales de B y C con respecto a A.

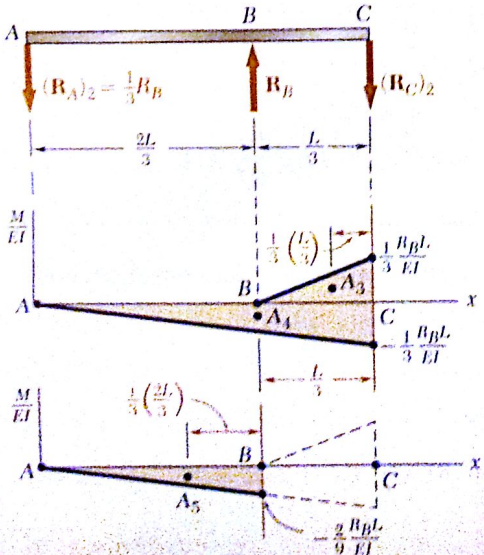


Carga distribuida. Al considerar el diagrama (M/EI) desde A hasta un punto arbitrario X, se tiene

$$(t_{X/A})_w = A_1\frac{x}{3} + A_2\frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\frac{wLx}{2EI}x\right)\frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{3}\frac{wx^2}{2EI}x\right)\frac{x}{4} = \frac{wx^3}{24EI}(2L - x)$$

Haciendo sucesivamente $x = L$, y también $x = \frac{2}{3}L$, queda

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \qquad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243}\frac{wL^4}{EI}$$



Carga de reacción redundante

$$(t_{C/A})_R = A_3\frac{L}{9} + A_4\frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}\frac{L}{3}\right)\frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}L\right)\frac{L}{3} = -\frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_5\frac{2L}{9} = \left[-\frac{1}{2}\frac{2R_BL}{9EI}\left(\frac{2L}{3}\right)\right]\frac{2L}{9} = -\frac{4}{243}\frac{R_BL^3}{EI}$$

Carga combinada. Al sumar los resultados obtenidos se tiene

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI} \qquad t_{B/A} = \frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}$$

Reacción en B. Al sustituir $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$ en la ecuación (1), queda

$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}\right]$$

$$R_B = 0.6875wL$$

$$R_B = 0.688wL\uparrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilice el método del momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.125 a 9.128 Para la viga prismática y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la deflexión en el punto *D*, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

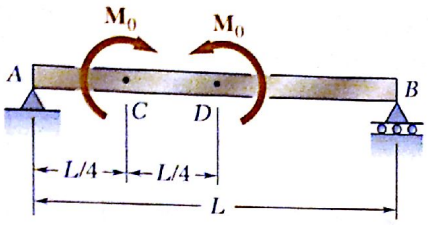


Figura P9.125

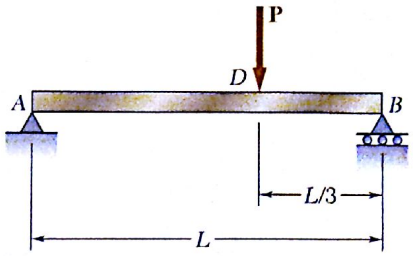


Figura P9.126

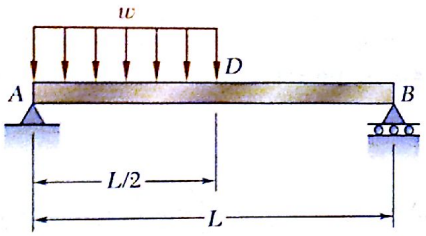


Figura P9.127

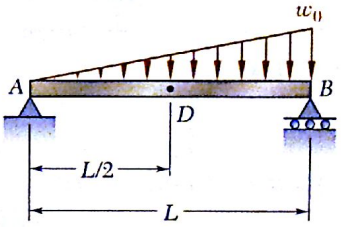


Figura *P9.128*

9.129 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

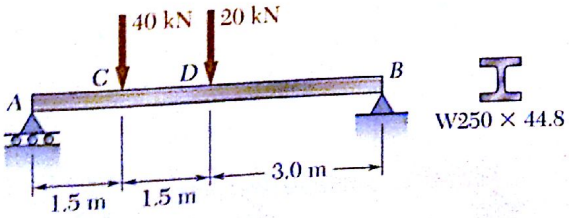


Figura P9.129

9.130 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *E*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

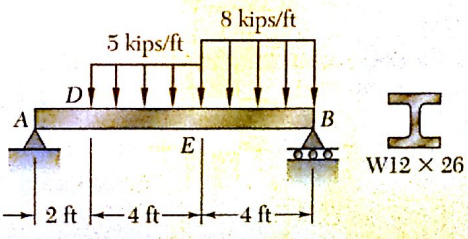


Figura P9.130

9.131 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 1.7 \times 10^6$ psi.

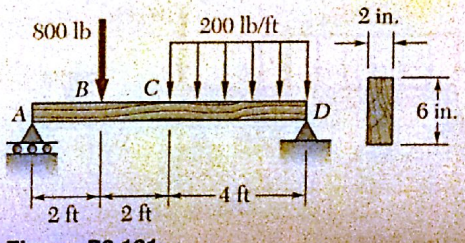


Figura *P9.131*

9.132 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

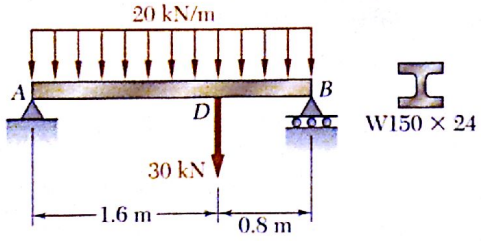


Figura P9.132

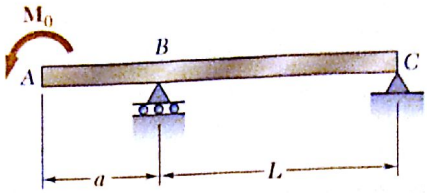


Figura *P9.133*

9.133 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*.

9.134 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

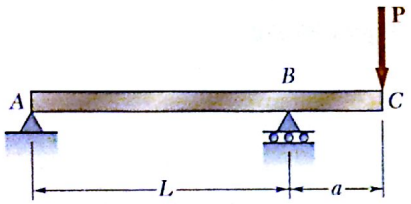


Figura P9.134

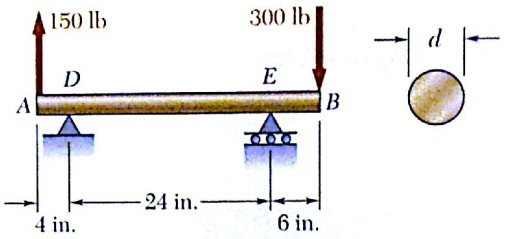


Figura P9.135

9.135 Si se sabe que la viga *AB* está hecha de una barra de acero macizo con un diámetro $d = 0.75$ in., para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.136 Si se sabe que la viga *AD* está hecha de una barra de acero macizo, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

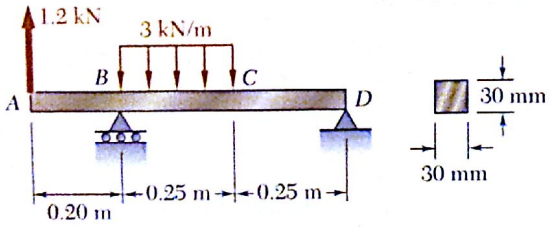


Figura P9.136

9.137 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

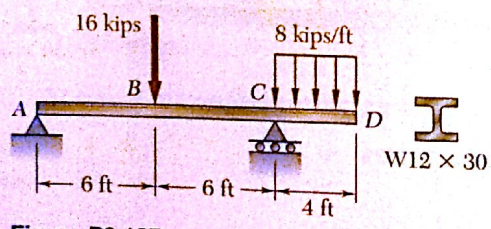


Figura P9.137

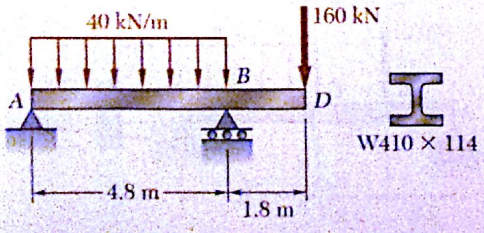


Figura *P9.138*

9.138 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.139 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la pendiente en el extremo *B*, *c*) la deflexión en el punto medio *C*.

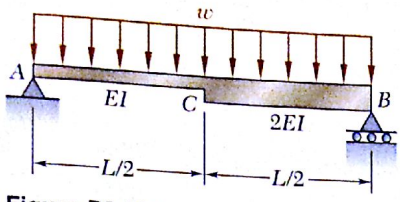


Figura P9.139

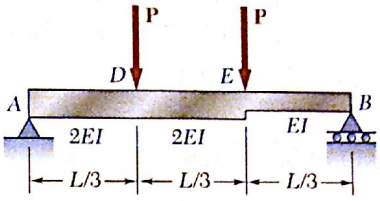


Figura P9.140

9.140 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión *a*) en el punto *D*, *b*) en el punto *E*.

9.141 a 9.144 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine la magnitud y ubicación de la máxima deflexión hacia abajo.

9.141 Viga y carga del problema 9.126.
9.142 Viga y carga del problema 9.128.
9.143 Viga y carga del problema 9.129.
9.144 Viga y carga del problema 9.130.

9.145 Para la viga y la carga del problema 9.135, determine la magnitud y localización de la máxima deflexión hacia arriba en el claro *DE*.

9.146 Para la viga y la carga del problema 9.138, determine la magnitud y localización de la máxima deflexión hacia arriba en el claro *AB*.

9.147 a 9.150 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el apoyo deslizante.

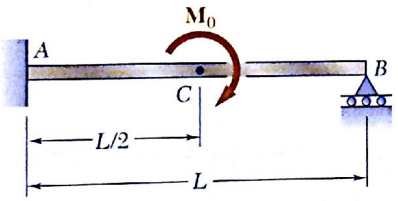


Figura P9.147

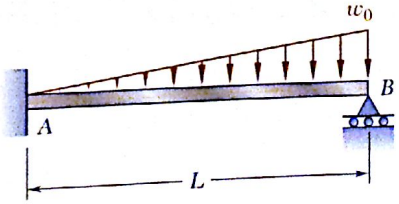


Figura *P9.149*

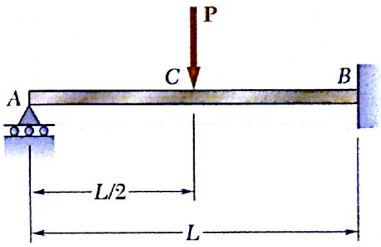


Figura P9.148

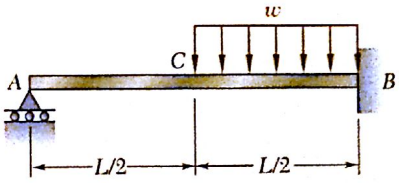


Figura P9.150

***9.151* y 9.152** Para la viga y la carga que se muestran, determine la reacción en cada apoyo.

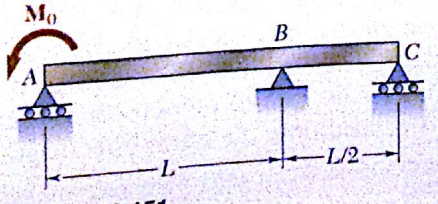


Figura *P9.151*

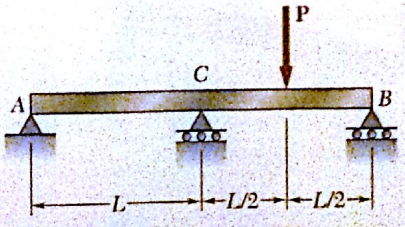


Figura P9.152

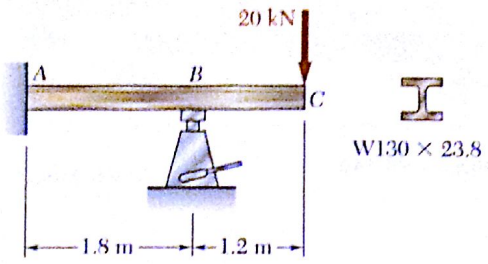


Figura P9.153

9.153 Se usa un gato hidráulico para elevar el punto B de la viga en voladizo ABC. Originalmente la viga era recta, horizontal y sin carga. Después se aplicó una carga de 20 kN en el punto C, lo que ocasionó que dicho punto se desplazara hacia abajo. Determine *a)* qué tanto debe elevarse el punto B para que el punto C regrese a su posición original, *b)* el valor final de la reacción en B. Utilice $E = 200$ GPa.

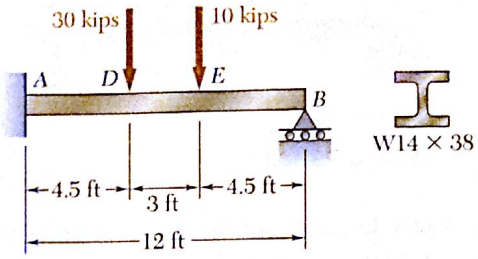


Figura P9.154

9.154 Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

9.155 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual la fuerza en éste es igual a un tercio de la carga total sobre la viga.

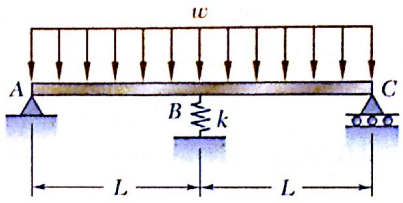


Figura P9.155 y P9.156

9.156 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual el momento flector en B es $M_B = -wL^2/10$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

Este capítulo se dedicó a determinar las pendientes y deflexiones de vigas sometidas a cargas transversales, para lo cual se emplearon dos enfoques. En primer lugar, se usó un método matemático basado en el método de integración de una ecuación diferencial para obtener las pendientes y deflexiones en cualquier punto de la viga. Luego se utilizó el *método del momento de área* para encontrar las pendientes y deflexiones en un punto dado de la viga. Se puso énfasis especial en el cálculo de la deflexión máxima de una viga sometida a una carga dada. También se aplicaron estos métodos para calcular las deflexiones en el análisis de *vigas indeterminadas*, que son aquellas en las que el número de reacciones en los apoyos excede al número de ecuaciones de equilibrio disponibles para despejar dichas incógnitas.

En la sección 9.2 se hizo notar que la ecuación (4.21) de la sección 4.4, que relaciona la curvatura $1/\rho$ de la superficie neutra y el momento flector M en una viga prismática sometida a flexión pura, puede aplicarse a una viga bajo carga transversal pero que M y $1/\rho$ variarán de sección a sección. Llamando x la distancia desde el extremo izquierdo de la viga, se escribe

Deformación de una viga bajo carga transversal

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

Esta ecuación permite determinar el radio de curvatura de la superficie neutra para cualquier valor de x y extraer algunas conclusiones generales en cuanto a la forma de la viga deformada.

En la sección 9.3 se estudió cómo obtener una relación entre la deflexión y de una viga, medida en un punto dado Q, y la distancia x de ese punto a algún origen fijo (figura 9.6*b*). Tal relación define la *curva elástica* de una viga. Expresando la curvatura $1/\rho$ en función de las derivadas de $y(x)$ y reemplazando en (9.91), se obtuvo la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

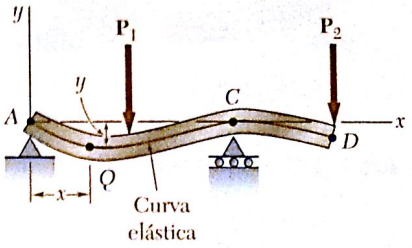


Figura 9.6*b*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

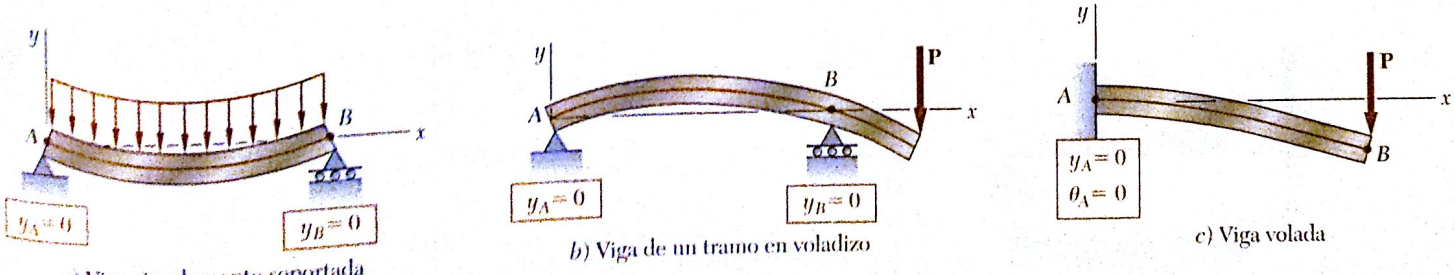
Integrando esta ecuación dos veces, se obtuvieron las siguientes expresiones para la pendiente $\theta(x) = dy/dx$ y la deflexión $y(x)$, respectivamente.

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$

El producto EI se conoce como la *rigidez a flexión* de la viga; C_1 y C_2 son dos constantes de integración, que pueden calcularse de las *condiciones de frontera* impuestas en la viga por sus apoyos [véase figura 9.8 y el ejemplo 9.01]. La deflexión máxima se obtiene determinando el valor de x que hace que la pendiente sea igual a cero y el correspondiente valor de y [véase ejemplo 9.02 y el problema modelo 9.1].

Condiciones de frontera



a) Viga simplemente soportada

b) Viga de un tramo en voladizo

c) Viga volada

Figura 9.8 Condiciones de frontera para vigas estáticamente determinadas.

Curva elástica definida con funciones diferentes

Figura 9.20

Cuando la carga es tal que se requieren diferentes funciones para representar el momento flector en diversas porciones de la viga, también se requieren varias ecuaciones diferenciales que conducirán a funciones diferentes para la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$ en las porciones de la viga. En el caso de la viga y cargas consideradas en el ejemplo 9.03 (figura 9.20) se necesitaron dos ecuaciones diferenciales, una para la porción AD de la viga y otra para la porción BD. La primera generó las funciones θ_1 y y_1, la segunda θ_2 y y_2. En total hubo que determinar cuatro constantes de integración; dos se obtuvieron anulando las deflexiones en A y B y las otras dos expresando que en D, la pendiente y la deflexión eran comunes para las porciones AD y DB de la viga.

En la sección 9.4 se estudió que en el caso de una viga con carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede obtenerse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas que dan V, M, θ y y, en ese orden. Para la viga en voladizo de la figura 9.21*a* y la viga simplemente apoyada de la figura 9.21*b*, las cuatro constantes de integración pueden obtenerse de las cuatro condiciones de frontera indicadas en la figura [véase el ejemplo 9.04 y el problema modelo 9.2].

a) Viga volada *b*) Viga simplemente soportada

Figura 9.21 Condiciones de frontera para vigas que soportan cargas distribuidas.

Vigas estáticamente indeterminadas

En la sección 9.5 se analizaron *las vigas estáticamente indeterminadas*, es decir, vigas apoyadas de tal manera que las reacciones de los apoyos incluían cuatro o más incógnitas. Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio, era necesario complementarlas con ecuaciones obtenidas de las condiciones de frontera impuestas por los apoyos. Para la viga de la figura 9.24, se observó que las reacciones en los apoyos comprendían cuatro incógnitas, M_A, A_x, A_y y B. Una viga como ésta es *indeterminada de primer grado*. (Si se hubieran incluido cinco incógnitas, la viga sería inde-

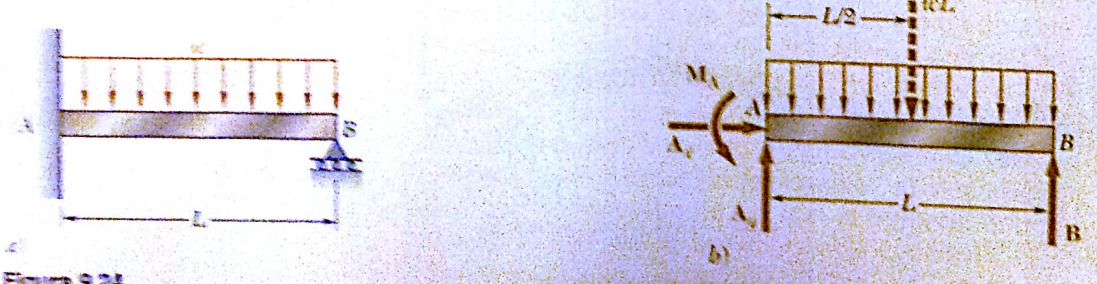


Figura 9.24

terminada de *segundo grado*.) Expresando el momento flector $M(x)$ en función de las cuatro incógnitas e integrando dos veces [véase el ejemplo 9.05], se determinaron la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$ en función de tales incógnitas y de las constantes de integración C_1 y C_2. Las seis incógnitas incluidas en este cálculo se obtuvieron resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 9.24*b* y las tres ecuaciones que expresan $\theta = 0$, $y = 0$ para $x = 0$, y que expresan $y = 0$ para $x = L$ [véase figura 9.25 y problema modelo 9.3].

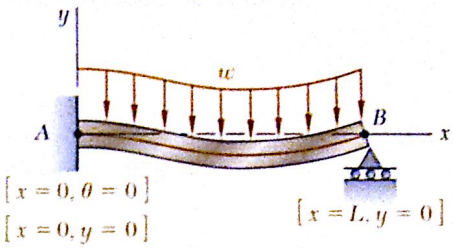


Figura 9.25

El método de integración proporciona un modo eficiente para determinar la pendiente y la deflexión de cualquier punto de una viga prismática, siempre que el momento flector M pueda representarse por medio de una función analítica única. Sin embargo, cuando se requieren varias funciones para representar a M sobre toda la longitud de la viga, dicho método resulta laborioso ya que requiere ajustar pendientes y deflexiones en todo punto de transición. En la sección 9.6 se estudió que el uso de *funciones de singularidad* (introducidas en la sección 5.5) simplifica apreciablemente el cálculo de θ y de y en cualquier punto de la viga. Consi-

Uso de las funciones de singularidad

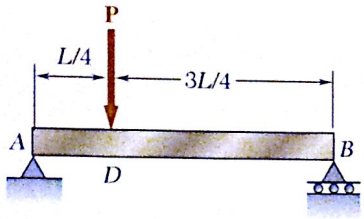


Figura 9.17

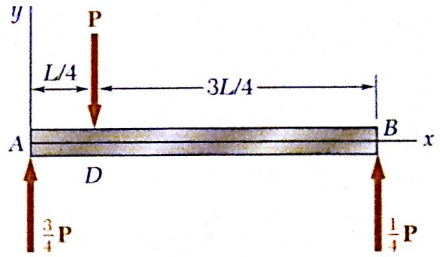


Figura 9.29

derando de nuevo el ejemplo 9.03 (figura 9.17), la fuerza cortante de cualquier punto de la viga se expresó como

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

en donde la función paso $\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^0$ es 0 cuando la cantidad entre paréntesis triangulares $\langle\ \rangle$ es negativa, e igual a uno de otra manera. Integrando tres veces, se obtiene sucesivamente

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \qquad (9.44)$$

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{8}Px^2 - \tfrac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \qquad (9.46)$$

$$EI\,y = \tfrac{1}{8}Px^3 - \tfrac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (9.47)$$

en donde los paréntesis triangulares $\langle\ \rangle$ deben reemplazarse por cero si la cantidad que está en el interior de ellos es negativa, y por paréntesis ordinarios en otro caso. Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de frontera de la figura 9.30 [véase ejemplo 9.06 y los problemas modelo 9.4, 9.5 y 9.6].

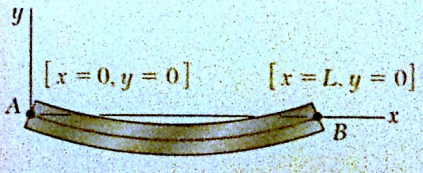


Figura 9.30

Método de superposición

La parte siguiente del capítulo se dedicó al *método de superposición*, que consiste en determinar separadamente, y luego sumar, la pendiente y la deflexión causadas por las diferentes cargas aplicadas a una viga [véase sección 9.7]. Este método se facilitó mediante el uso de la tabla del apéndice D, que trae pendientes y deflexiones de viga para varias cargas y tipos de apoyo [véase ejemplo 9.07 y problema modelo 9.7].

Vigas estáticamente indeterminadas por superposición

El método de superposición puede usarse efectivamente con *vigas estáticamente indeterminadas* [véase sección 9.8]. En el caso de la viga del ejemplo 9.08 (figura 9.36), que incluye cuatro reacciones desconocidas y es determinada de *primer grado*, la reacción en B se tomó como *redundante* y la viga se liberó de ese apoyo. Tratando a $\mathbf{R}_B$ como una carga desconocida y considerando, en forma separada, las deflexiones causadas en B por la carga distribuida dada y por $\mathbf{R}_B$ se dijo que la suma de estas deflexiones era cero (figura 9.37). Se despejó R_B de la ecuación obtenida (véase también el problema modelo 9.8). En el caso de una viga indeterminada de *segundo grado*, es decir, con reacciones en los apoyos que incluyen cinco incógnitas, deben designarse dos reacciones como redundantes y eliminarse o modificarse adecuadamente los correspondientes apoyos [véase problema modelo 9.9].

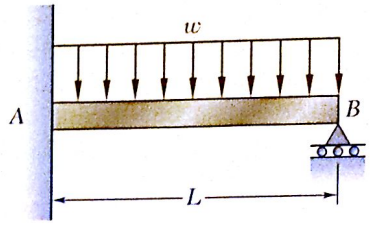


Figura 9.36

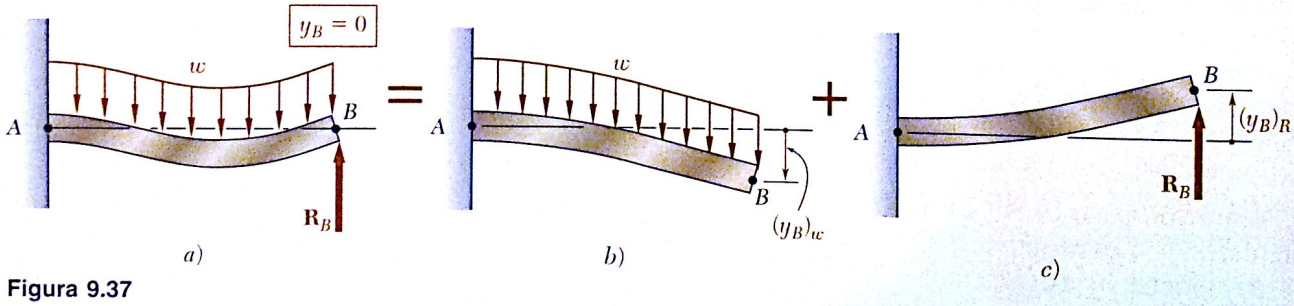


Figura 9.37

Primer teorema del momento de área

A continuación se estudió la determinación de las deflexiones y pendientes de vigas por medio del *método del momento de área*. Con objeto de deducir los *teoremas de momento de superficie* [sección 9.9], primero se dibujó el diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo largo de la viga, obtenido dividiendo el momento flector M entre la rigidez a flexión EI (figura 9.41). Luego se obtuvo el *primer teorema de momento de área*, el cual establece lo siguiente: *el área bajo el diagrama (M/EI) entre dos puntos es igual al ángulo entre las tangentes a la curva elástica dibujada en dichos puntos*. Al considerar tangentes en C y D, queda

$$\theta_{D/C} = \text{área debajo del diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ y } D \qquad (9.56)$$

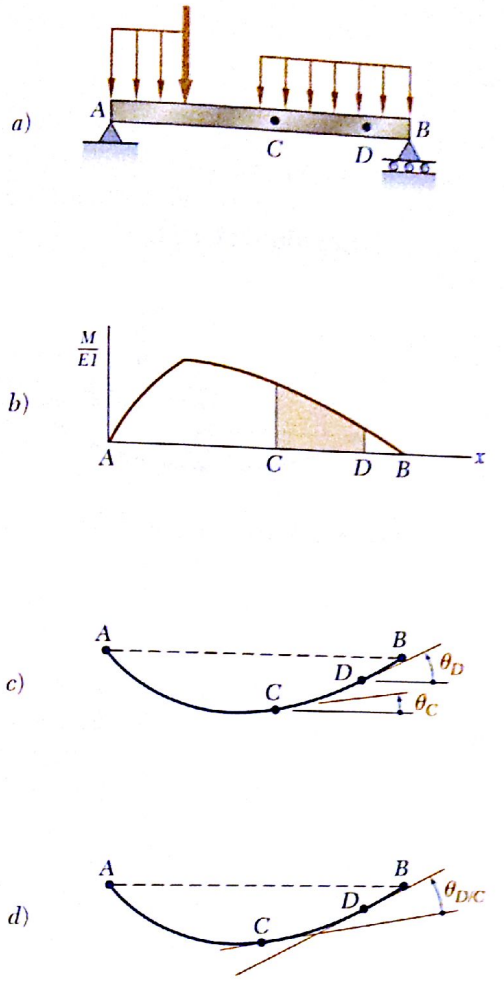


Figura 9.41 Primer teorema de momento de superficie.

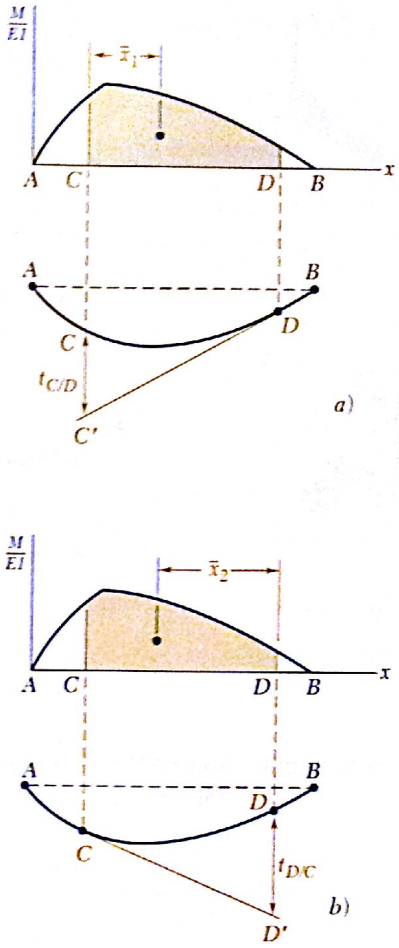


Figura 9.45 Segundo teorema de momento de superficie.

Segundo teorema del momento de área

Usando nuevamente el diagrama (*M/EI*) y un boceto de la viga deflectada (figura 9.45), se dibujó la tangente en el punto *D* y se consideró la distancia vertical $t_{C/D}$, que se llamó la desviación tangencial de *C* respecto a *D*. Luego se dedujo el segundo teorema del momento de área, que establece lo siguiente: la desviación tangencial $t_{C/D}$ de *C* con respecto a *D* es igual al primer momento, con respecto a un eje vertical que pasa por *C*, del área bajo el diagrama (*M/EI*) entre *C* y *D*. Se tuvo cuidado en distinguir entre la desviación tangencial de *C* con respecto a *D* (figura 9.45*a*)

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_1 \qquad (9.59)$$

y la desviación tangencial de *D* con respecto a *C* (figura 9.45*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_2 \qquad (9.60)$$

Vigas en voladizo
Vigas con cargas simétricas

En la sección 9.10 se aprendió a determinar la pendiente y la deflexión en puntos de vigas *en voladizo* y vigas con *cargas simétricas*. Para vigas voladas, la tangente en el apoyo fijo es horizontal (figura 9.46); y para vigas cargadas simétricamente, la tangente es horizontal en el punto medio C de la viga (figura 9.47). Al usar la tangente horizontal como *tangente de referencia*, fue posible determinar pendientes y deflexiones con el uso del primero y segundo teoremas de momento de área, respectivamente [ejemplo 9.09, problemas modelo 9.10 y 9.11]. Se observó que para encontrar una deflexión que no sea una desviación tangencial (figura 9.47*c*) es necesario determinar primero cuáles desviaciones tangenciales pueden combinarse para obtener la deflexión deseada.

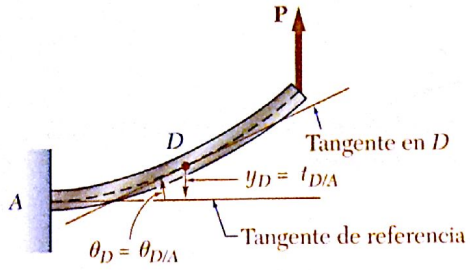


Figura 9.46

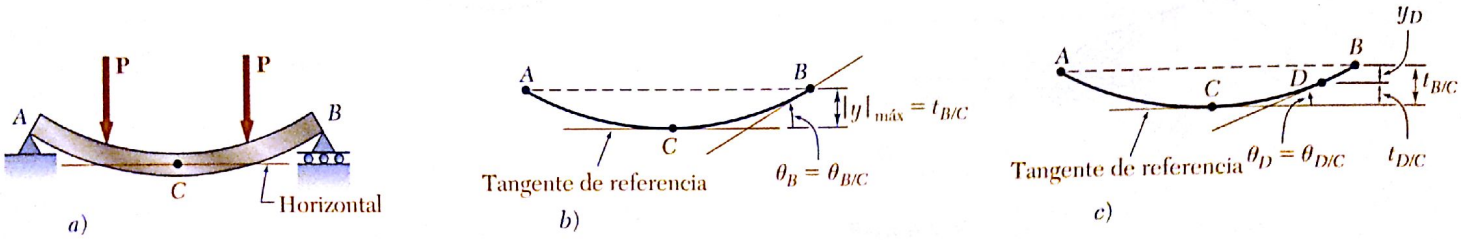


Figura 9.47

Diagrama de momento flexionante por partes

En muchos casos, la aplicación de los teoremas de momento de área se simplifica si se considera separadamente el efecto de cada carga [véase sección 9.11]. Para hacer esto se elaboró el *diagrama (M/EI) por partes* dibujando un diagrama (M/EI) distinto para cada carga. Las áreas y momentos de área bajo los diversos diagramas pueden sumarse para determinar pendientes y desviaciones tangenciales para la viga y carga originales [véase ejemplos 9.10 y 9.11].

Cargas asimétricas

En la sección 9.12 se extendió el uso del método del momento de área para incluir vigas con *cargas asimétricas*. Se observó que por lo general, no es posible localizar una tangente horizontal, por lo que se seleccionó una tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga, ya que la pendiente de dicha tangente puede determinarse con facilidad. Por ejemplo, para la viga y carga que se ven en la figura 9.59, la pendiente de la tangente en A se obtiene calculando la desviación tangencial $t_{B/A}$ y dividiendo la distancia L entre los apoyos A y B. Después, con el empleo de ambos

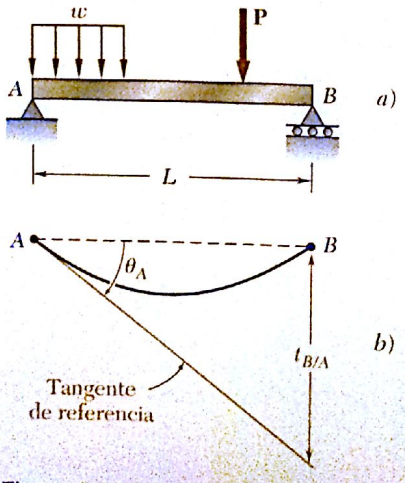
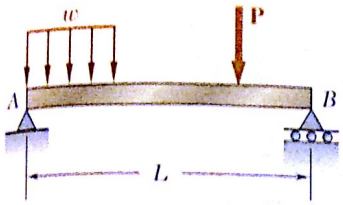


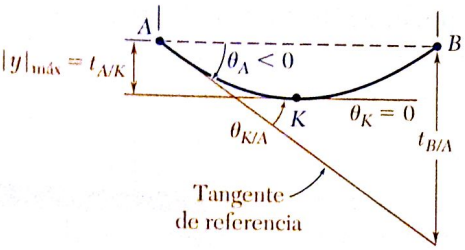
Figura 9.59

teoremas de momentos de área y geometría elemental, se pudo determinar la pendiente y deflexión en cualquier punto de la viga [véase ejemplo 9.12 y problema modelo 9.12].

La *deflexión máxima* de una viga cargada en forma asimétrica generalmente no ocurre a la mitad del claro. El enfoque descrito en el párrafo precedente se empleó para determinar el punto K en donde se da la deflexión máxima, así como la magnitud de ésta [véase sección 9.13]. Al observar que la pendiente en K es igual a cero (figura 9.68), se concluyó que

Deflexión máxima





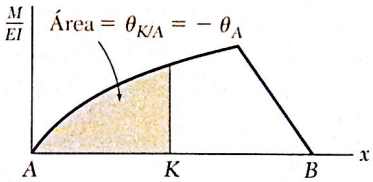


Figura 9.68

$\theta_{K/A} = -\theta_A$. Al tener presente el primer teorema de momento de área, se determinó la localización de K con la medición bajo el diagrama (M/EI) de un área igual a $\theta_{K/A}$. Se obtuvo la deflexión máxima con el cálculo de la desviación tangencial $t_{A/K}$ [véase problemas modelo 9.12 y 9.13].

En la última parte del capítulo [sección 9.14] se aplicó el método de momento de área al análisis de *vigas estáticamente indeterminadas*. Como las reacciones para la viga y carga que se muestran en la figura 9.71 no pueden determinarse sólo con la estática, se designó redundante una de las reacciones en la viga ($\mathbf{M}_A$ en la figura 9.72*a*) y se consideró a dicha reacción redundante como una carga incógnita. La desviación tangencial de B con respecto a A se consideró en forma separada para la carga distribuida (figura 9.72*b*) y para la reacción redundante (figura 9.72*c*). Al expresar que bajo la acción combinada de la carga distribuida y del par $\mathbf{M}_A$ la desviación tangencial de B con respecto a A debía ser cero, se concluyó que

Vigas estáticamente indeterminadas

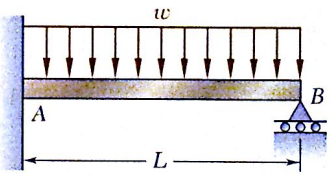
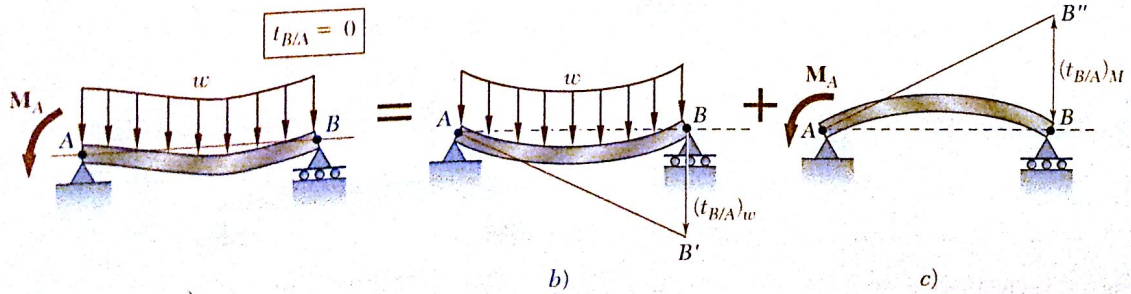


Figura 9.71

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

Y a partir de esta expresión se determinó la magnitud de la reacción redundante $\mathbf{M}_A$ [véase ejemplo 9.14 y problema modelo 9.14].



a) *b*) *c*)

Figura 9.72

PROBLEMAS DE REPASO

9.157 Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo *AB*, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.

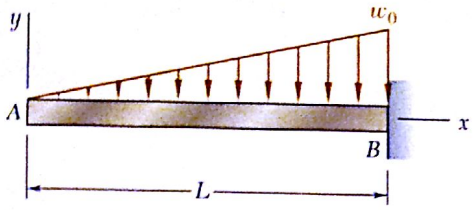


Figura P9.157

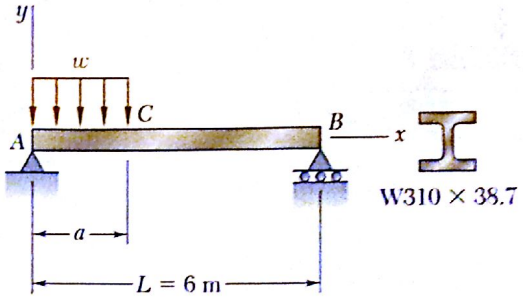


Figura *P9.158*

9.158 Para la viga y la carga que se muestran en la figura se sabe que a = 2 m, w = 50 kN/m y E = 200 GPa, determine *a*) la pendiente en el apoyo *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

9.159 Para la viga y carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.

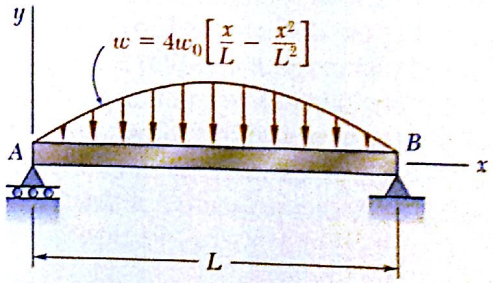


Figura P9.159

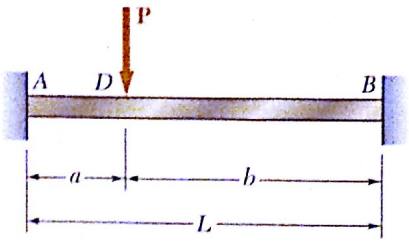


Figura P9.160

9.160 Determine la reacción en *A* y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

9.161 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice E = 12 GPa.

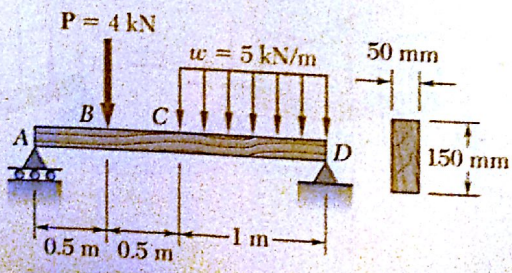


Figura P9.161

9.162 La barra rígida *DEF* está soldada en el punto *D* a la viga de acero laminado *AB*. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

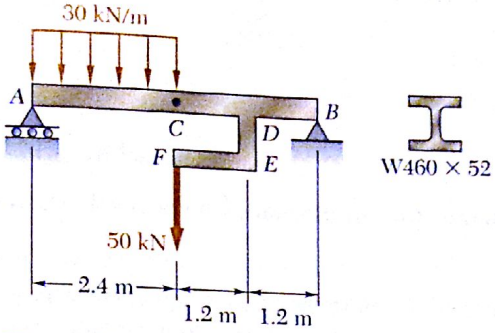


Figura *P9.162*

9.163 La viga *CE* descansa sobre la viga *AB*, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa acero laminado con perfil W10 × 33, determine para la carga que se indica, la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

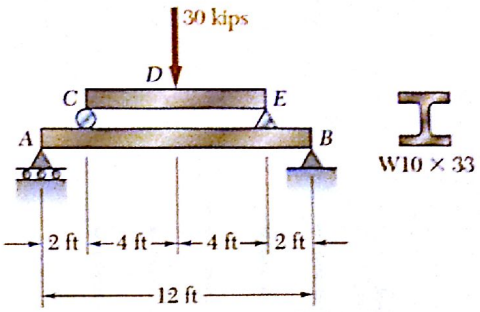


Figura P9.163

9.164 Si se sabe que las vigas *AC* y *BD* que se muestran en la figura tienen la misma rigidez a flexión, determine la reacción en *B* para la carga mostrada.

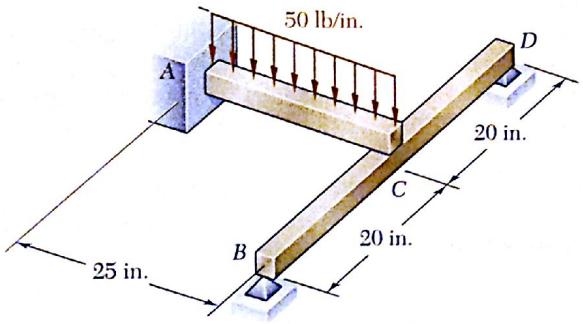


Figura *P9.164*

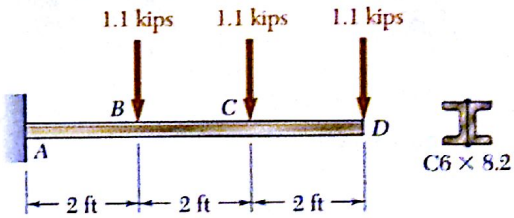


Figura P9.165

9.165 Dos canales C6 × 8.2 están soldados por su parte posterior y sostienen la carga que se muestra en la figura. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

9.166 Para la viga prismática y la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

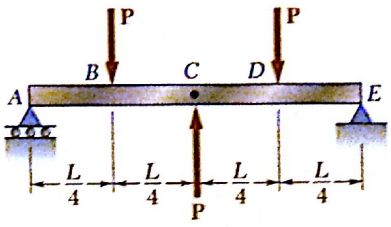


Figura *P9.166*

9.167 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la magnitud y ubicación de la máxima deflexión hacia abajo.

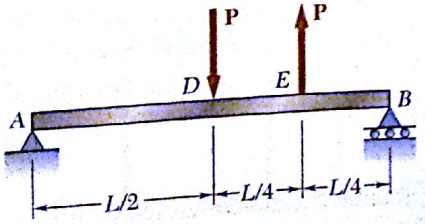


Figura P9.167

9.168 Determine la reacción en el apoyo móvil y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

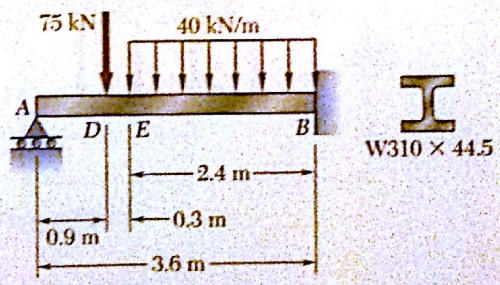


Figura P9.168